Glava 3

Simetrija

Osna simetrija u ravni

def. Neka je s proizvoljna prava u ravni α. Svakoj tački X ravni α pridružimo tačku X' te iste ravni tako da su zadovoljeni ovi uslovi:

1. Ako $X \in s$ onda je $X' \equiv X$.
2. Ako $X \notin s$ onda je prava $XX' \perp s$ i $XX_0 \cong X'X_0$ gdje je $\{X_0\} = XX' \cap s$.

Pošto za svaku pravu s i za svaku tačku X postoji jedna i samo jedna prava koja sadrži tačku X i normalna je na pravu s i pošto je za svaku duž XX_0 jednoznačno određena tačka X' za koju vrijedi $XX_0 \cong X'X_0$ to je skup svih mogućih dvojki (X, X') preslikavanje ravni α na samu sebe. To preslikavanje zove se osna simetrija u ravni, prava s zove se osa simetrije i označava se sa σ_s. Dakle:

$X' = \sigma_s(X)$. Iz same definicije odmah slijedi da je $X = \sigma_s(X')$ tj. $\sigma_s = \sigma_s^{-1}$ tj. $\underbrace{\sigma_s^2}_{\sigma_s \circ \sigma_s = i} = i$.

Definicija:

Svaka transformacija čiji je kvadrat identična transformacija zove se involucija.

Dakle osna simetrija je involucija. Uočimo još neke osobine osne simetrije. Neka je $A_0 \in s$. Tada je $\sigma_s(A_0) = A_0$ dakle svaka tačka osne simetrije preslikava se na samu sebe pa je svaka tačka ose simetrije stalna tj. nepokretna tačka. Neka $A \notin s$, $A' = \sigma_s(A)$ i $\{A_0\} = AA' \cap s$. Sada se poluprava A_0A preslika na polupravu A_0A'. U ovom slučaju prava AA' se preslika u tu istu pravu ali je samo jedna tačka u tom preslikavanju nepokretna. To je tačka A_0. Uočimo poluravan čija je ivica $AA' \perp s$. Neka je B proizv. tačka te poluravni i $B' = \sigma_s(B)$. Sada je i $BB' \perp s$. Iz $AA' \perp s$ i $BB' \perp s$ slijedi da je $A'A \cap B'B = \emptyset$. Dakle i tačka B' je sa iste strane ivice sa koje je tačka B.

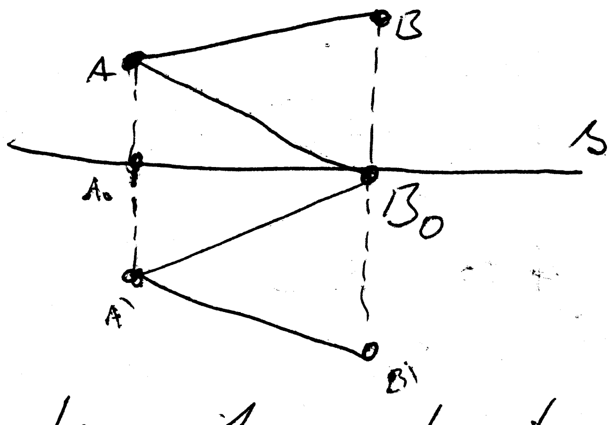
Dakle poluravan čija je ivica normalna na osu simetrije preslikava se na tu istu poluravan.

Teorema:

Osna simetrija preslikava duž na podudarnu duž.

Dokaz: Ako je prava kojoj pripada duž AB normalna na osu simetrije onda je dokaz neposredna posljedica aksiome III_3 i teorema koje su neposredne posljedice aksioma podudarnosti za duž. Mi ćemo predpostaviti da su krajevi duži A i B sa iste strane prave s jer je dokaz o slučaju kad bi krajevi nisu sa iste strane prave s sličan. Pa neka je $A' = \sigma_s(A)$, $B' = \sigma_s(B)$, $\{A_0\} = AA' \cap s$ a $\{B_0\} = BB' \cap s$. Treba dokazati da je $AB \cong A'B'$.

Iz pretpostavki teoreme slijedi da je $AA_0 \cong A'A_0$ (1). Ugao $\sphericalangle AA_0B_0 \cong \sphericalangle A'A_0B_0$ (2), $BB_0 \cong B'B_0$ (3) i $\sphericalangle A_0B_0B \cong \sphericalangle A_0B_0B'$ (4).

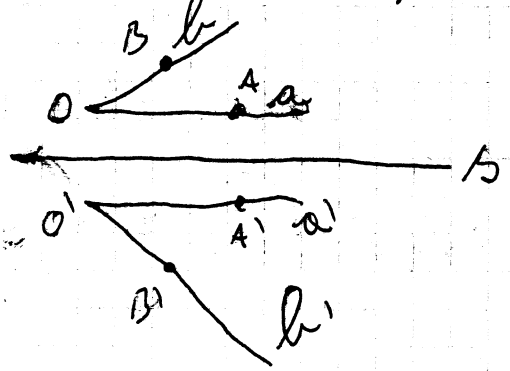


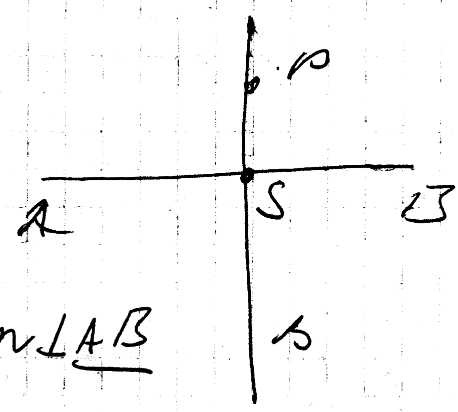
Uočimo trouglove ΔAA_0B_0 i $\Delta A'A_0B_0$. Kako vrijedi 1, 2 i $A_0B_0 \cong A_0B_0$ to primjenjujući najprije lemu 1 na te trouglove pa onda aksiomu 3.5. dobijamo da vrijedi $AB_0 \cong A'B_0$ (5) i $\sphericalangle AB_0A_0 \cong \sphericalangle A'B_0A_0$ (6). Iz 4 i 6 te leme 3 drugi dio slijedi da je ugao $\sphericalangle AB_0B \cong \sphericalangle A'B_0B'$. Uočimo sad trouglove ΔAB_0B i $\Delta A'B_0B'$ iz 5, 3 i 7 primjenjujući lemu 1 dobivamo da je duž $AB \cong A'B'$.

Iz posljednje teoreme, teoreme o zbiru duži, definicije osne simetrije, definicije i definicije o odnosima strana i uglova tr. proizlazi ova <u>posljedica</u>: Osna simetrija je kolineacija, tj. ona preslikava kolinearne tačke u kolinearne tačke.

<u>Teorema</u>

Osna simetrija preslikava ugao u podudaran ugao.





<u>Dokaz:</u> Neka je $\sigma_s(\measuredangle ab) = \measuredangle a'b'$. Treba dokazati $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$. Ako je O tjeme ~~ug~~ $\measuredangle ab$ i $O' = \sigma_s(O)$ onda je O' tjeme ugla $\measuredangle a'b'$. Neka je $A \in a$, $A' = \sigma_s(A)$. i $B \in b$ $B' = \sigma_s(B)$ tada $A' \in a'$ i $B' \in b'$ vrijedi: $OA = O'A'$ $OB \cong O'B'$, $AB \cong A'B'$. Primjenjujući na trouglove $\triangle OAB$ i $\triangle O'A'B'$ lemu 6 dobijemo da je $\measuredangle AOB \cong \measuredangle A'O'B'$ što je i trebalo dokazati. Kao neposrednu posljedicu imamo <u>tvrdnju</u>: Osna simetrija preslikava pravi ugao na pr. ugao, normalne prave na normalne prave.

<u>Definicija</u> simetrale duži:

Prava s je simetrala duži AB ako ona sadrži

središte ~~s~~ duži AB i normalna je na pravu AB.
Pošto je središte duži jednoznačno određena tačka i pošto za svaku pravu i za svaku tačku postoji jedna i samo jedna prava koja sadrži tu tačku a normalna je na datu pravu slijedi po-
sljedica 1: simetrala duži jednoznačno je određena.
Iz definicije osne simetrije i definicije simetrale duži slijedi ova posljedica 2: Potreban i dovoljan uslov da prava s bude simetrala duži AB je $\sigma_s(A) = B$.

Teorema

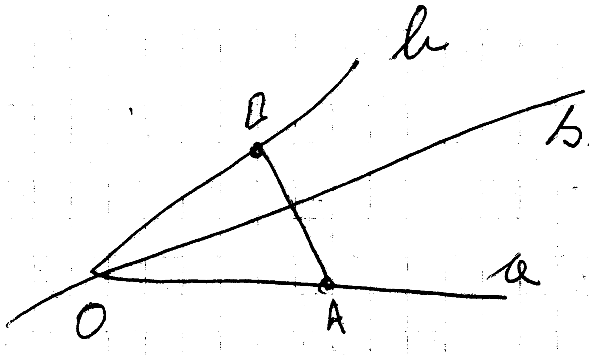
Ako tačka P pripada simetrali s duži AB onda je $AP \cong BP$.

Dokaz: Pošto $P \in s$ to je $\sigma_s(A) = B$ i $\sigma_s(P) = P$. Odavde je s obzirom na maloprije ~~prethod~~ dokazanu ~~dum~~ teoremu $AP \cong BP$.

Teorema

Neka je data duž AB i tačka P. Ako je $AP \cong BP$ onda tačka P pripada simetrali s duži AB.

Dokaz: Neka je $AP \cong BP$ i S središte duži AB. U trouglovima $\triangle ASP$ i $\triangle BSP$ je $SP \cong SP$, $AP \cong BP$ i $AS \cong BS$. Primjenjujući lemu 6 na te trouglove dobijamo da je $\measuredangle ASP \cong \measuredangle BSP$ i pošto su to naporedni uglovi oni su pravi. Ovo znači da prava PS sadrži tačku S i normalna je na pravu AB pa je ona simetrala duži AB.



bisektrisa

simetrale ugla

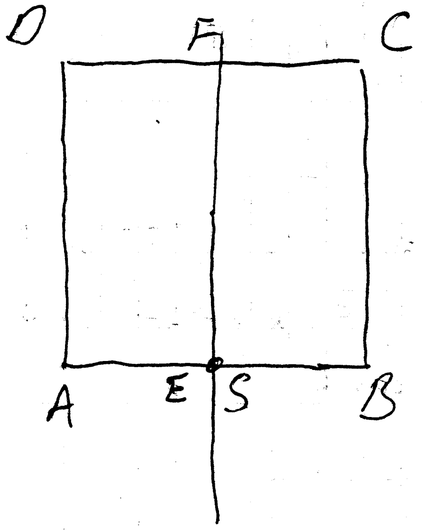
Definicija: Označimo sa O tjeme $\sphericalangle ab$.
Ako je s takva prava da je $O \in s$ i $G_s(a) = b$
onda je prava s ~~simetrala ugla~~ $\sphericalangle ab$.
Tačka O na pravoj s određuje dvije poluprave.
Onu polupravu koja je u unutrašnjoj oblasti
ugla $\sphericalangle ab$ označimo sa s_1. Tada je
$\sphericalangle a s_1 \cong \sphericalangle b s_1$. Polupravu s_1 zovemo
BISEKTRISOM ugla i kažemo da ona polovi
ugao $\sphericalangle ab$ ili da $\sphericalangle ab$ dijeli na dva podudarna
ugla. $\sphericalangle a s_1$ i $\sphericalangle b s_1$ su polovine ugla $\sphericalangle ab$.

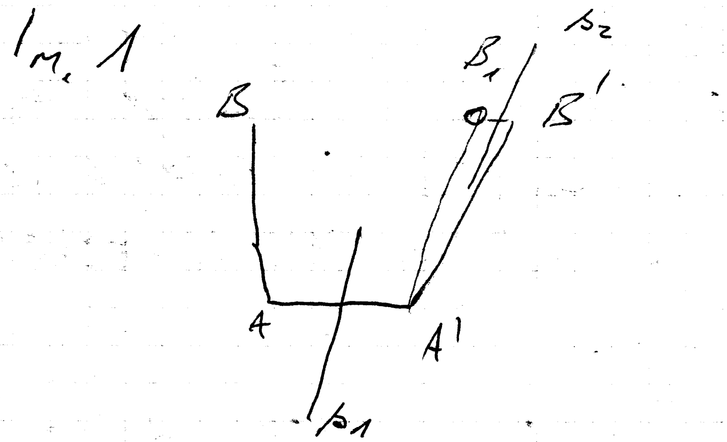
Teorema
Simetrala ugla jednoznačno je određena.

Dokaz: Neka je O tjeme ugla $\sphericalangle ab$ i s
simetrala toga ugla. Uzmimo na kraku a tačku
A i na kraku b tačku B tako da je $OA \cong OB$.
Sada je s istovremeno i simetrala duži
AB i simetrala ugla $\sphericalangle ab$. Pošto je simetrala
duži AB jednoznačno određena to je i sime-
trala ugla jednoznačno određena.

Definicija SAKERIjevog četverougla: Sakerijev
četverougao je onaj četverougao ABCD u kome
je $AD \cong BC$ a uglovi $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle CBA$ su pravi.
Stranica AB je donja a DC je gornja

osnovica ovoga četverougla. Stranice AD i BC su bočne stranice.





Teorema

Simetrala donje osnovice Sak~~ijevog~~ erijevog četverougla je simetrala i njegove gornje osnovice. Uglovi Sakrijevog četvoro. čija su tjemena krajnje tačke gornje osnovice podudarni su.

Dokaz

Uočimo Sakrijev četverougao ABCD i sa E i F označimo središta duži AB i CD. Neka je s simetrala duži AB. Tada je $\sigma_s(A)=B$. U ovoj simetriji prava AD koja je normalna na pravu AB preslikava se na pravu koja sadrži tačku B a normalna je na pravu AB tj. na pravu BC. Po definiciji Sakrijevog četverougla duži AD i BC su podudarni pa simetrija σ_s preslikava AB u DC i pritom $\sigma_s(D)=C$. Drugim riječima $\sigma_s(\angle ADC)=\angle BCD$. Uopšte u ovoj simetriji vrijedi $\mathcal{G}_s(\square ABCD) = \square BADC$. Dakle prava s koja je simetrala donje osnovice Sakrijeve četv. je simetrala i gornje osnovice njegovog četveri a četverougao preslikava na samog sebe.

Definicija
Ako su figura F i prava s u takvom položaju da je $\mathcal{G}_s(F) = F$ onda kažemo da je prava s osa simetrije ili simetrala figure F.

Definicija
Neka je E središte donje osnovice a F središte gornje osnovice Sakrijevog četverougla $ABCD$. Duž EF zove se srednja duž Sakrijevog četverougla.

Sada na osnovu upravo dokazanog vrijedi ova teorema:
Prava koja sadrži srednju duž Sakrijevog četverougl. je osa simetrije tog četverougla.

Transformacija podudarnosti u ravni

Definicija ($f : \alpha \to \alpha$)
Obostrano jednoznačno preslikavanje f α u α tj. ravni α u samu sebe tako da za svake dvije tačke ravni α vrijedi $f(A)f(B) \cong AB$ je transformacija podudarnosti u ravni.

Iz ove defin. i defin. osne simetrije slijedi da je osna simetrija transformacija podudarnosti u ravni.

Kako je podudarnost duži tranzitivna to vrijedi također:

Proizvod konačnog broja osnih simetrija je transformacija podudarnosti u ravni.

Neka su $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ osne simetrije i neka je $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k$ pitamo se je li i π^{-1} transformacija podudarnosti u ravni.

Koristeći asocijativnost proizvoda preslikavanja i uzimajući u obzir da je osna simetrija involucija dobijamo:

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \ldots \sigma_{k-1} \circ \underbrace{\sigma_k) \circ (\sigma_k}_{i} \circ \sigma_{k-1} \circ \ldots \circ \sigma_k \circ \sigma_1) =$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_{k-1} \circ \sigma_{k-1} \circ \ldots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 =$$

$$= \ldots = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_1 = i$$

Drugim riječima $\pi^{-1} = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k)^{-1} =$

$$= \sigma_k \circ \sigma_{k-1} \circ \ldots \circ \sigma_2 \cdot \sigma_1 .$$

Dakle ako je π proizvod konačnog broja osnih simetrija onda je i π^{-1} proizvod konačnog broja osnih simetrija. Mi želimo dokazati i obrnuto:

Svaka transformacija podudarnosti u ravni može se prikazati kao proizvod konačnog broja osnih simetrija. U tu svrhu dokažimo sljedeću lemu:

Lema 1

Ako je duž AB podudarna $A'B'$ postoji proizvod osnih simetrija, ~~oz~~ označimo ga sa Π, tako da je $\Pi(AB) = A'B'$

Dokaz

Neka je $AB \cong A'B'$. Označimo sa ~~s_1~~ s_1 simetralu duži AA'. Tada je $G_{s_1}(A) = A'$. Ako je pri tome i $G_{s_1}(B) = B'$ dokaz je završen – Π je sama osna simetrija. Ako je pak $G_{s_1}(B) = B_1$ onda je duž $AB \cong A'B_1$. Kako je $AB \cong A'B'$ to je $A'B_1 \cong A'B'$. Simetrala s_2 duži $B'B_1$ je ujedno i simetrala ~~$\measuredangle$~~ $\measuredangle B'A'B_1$. U toj simetriji je $G_{s_2}(A') = A'$ i $G_{s_2}(B_1) = B'$. Drugim riječima $G_{s_2} \circ G_{s_1}(A) = A'$ i $G_{s_2} \circ G_1(B) = B'$ odnosno $G_{s_2} \circ G_{s_1}(AB) = A'B' = \Pi$.

Na sličan način dokazuje se i slijedeća lema.

Lema 2

Ako je u ~~Δ~~ ΔABC i $\Delta A'B'C'$ $AB \cong A'B'$ $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$ postoji proizvod osnih simetrija, označimo ga sa Π, tako da je $\Pi(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$.

Sad smo u mogućnosti da dokažemo slijedeću teoremu.

Teorema

Svaka transformacija podudarnosti u ravni je proizvod konačnog broja osnih simetrija.

Dokaz

Neka je $f: \alpha \to \alpha$ transformacija podudarnosti u ravni i ΔABC proizvoljan trougao. Iz definicije transformacije podudarnosti slijedi da je $f(A)f(B) \cong AB$, $f(A)f(C) \cong AC$ i $f(B)f(C) \cong BC$. Na taj način dobivamo dva trougla. Trougao $\Delta f(A)f(B)f(C)$ i ΔABC. Na osnovu leme 2 slijedi da postoji transformacija podudarnosti tako da je $\pi(\Delta f(A)f(B)f(C)) = \Delta ABC$. Odatle

(1) $\pi \circ f(A) = A$, $\pi \circ f(B) = B$ i $\pi \circ f(C) = C$. Da bismo dokazali našu tvrdnju mi treba da dokažemo da za svaku tačku $\forall P$ iz $P \in \alpha$ vrijedi $\pi \circ f(P) = P$.

Najprije predpostavimo da tačka (2) P ne pripada pravoj AB, $P \notin BC$ i $P \notin AC$. Posmatrajmo trouglove $\Delta(\pi \circ f(A)\, \pi \circ f(B)\, \pi \circ f(P))$ i ΔABP. S obzirom na (1) vrijedi $\pi \circ f(P) A \cong PA$ i $\pi \circ f(P) B \cong PB$. S obzirom na lemu 6 zaključujemo da je ili $\pi \circ f(P) = P$ ili je $G_{AB}(\pi f(P)) = P$. Polazeći od trouglova $\Delta(\pi \circ f(A)\, \pi \circ f(C)\, \pi \circ f(P))$ i ΔACP na isti način kao maloprije zaključujemo da je $\pi \circ f(P) = P$ ili $G_{AC}(\pi \circ f(P)) = P$.

Pošto su prave AB i AC dvije različite prave i vrijedi (2) to ne može istovremeno vrijediti:

$G_{AB}(\pi \circ f(P)) = P$ i $G_{AC}(\pi \circ f(P)) = P$

Drugim riječima vrijedi $\pi \circ f(P) = P$ tj. $\pi \circ f = i$ tj $f = \pi^{-1}$. Već smo dokazali da je π^{-1} proizvod osnih simetrija.

Ako neki od uslova (2) nije zadovoljen onda umjesto da podjemo od trougla ΔABC mi polazimo od ΔDEF tako da vrijedi $P \notin \overline{DE}$, $P \in \overline{DF}$ i $P \notin \overline{EF}$.

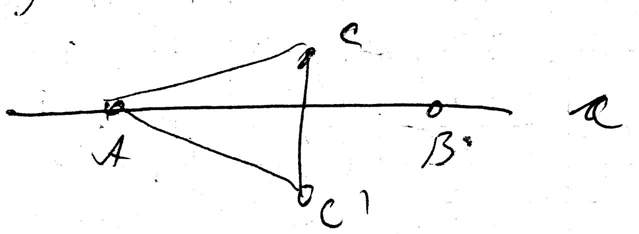
<u>Definicija</u>
Transformacija podudarnosti je prve vrste ili kretanja ako je ona proizvod parnog broja osnih simetrija. Transformacija podudarnosti je druge vrste ako je ona proizvod neparnog broja osnih simetrija.
Neposredne posljedice su:
<u>posljedica 1.</u> - transformacija podudarnosti je kolineacija. Ona kolinearne tačke preslikava na kolinearne, polupravu na polupravu, poluravan na poluravan, ugao na podudaran ugao i normalne prave na normalne prave.
<u>posljedica 2.</u> - transformacija podudarnosti u ravni jednoznačno je određena sa tri para kolinearnih tačaka A, A', B, B' i C, C'. Ako tačke A, B i C nisu kolinearne a zadovoljen je uslov $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$. ~~Posljedica 3~~
<u>posljedica 3</u> - svaka transformacija podudarnosti u ravni može se pokazati kao proizvod najviše tri osne simetrije.

<u>Teorema</u>
Ako transformacije podudarnosti u ravni preslikava polupravu u tu istu polupravu, onda je ona

ili identična transformacija ili osna simetrija.

Dokaz

Neka je π transformacija u ravni i a proizvoljna poluprava sa tačkom A. Po pretpostavci leme 1 $\pi(a)=a$ i $\pi(A)=A$. Ako je B proizvoljna tačka te poluprave onda je $\pi(B)=B$. Označimo sa a^* polupravu koja dopunjuje polupravu a do prave. Pošto je transformacija podudarnosti obostrano jednoznačno preslikavanje i kolineacija slijedi da se pri toj transformaciji poluprava a^* preslikava na sam sebe tj. $p = a \cup A \cup a^*$ preslikava se na samu sebe. Neka je C proizvoljna tačka koja ne pripada pravoj p ($C \notin p$) i neka je $\pi(C)=C'$. Slijedi da je $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$. Dakle naša transformacija podudarnosti π određena je trouglovima ΔABC i $\Delta ABC'$. Ako je tačka C' sa iste strane prave p sa koje je tačka C onda je to identična transformacija. Ako tačka C' nije sa iste strane prave p sa koje je tačka C



onda je prava p simetrala duži CC', vrijedi $\sigma_p(A)=A$, $\sigma_p(B)=B$ i $\sigma_p(C)=C'$.

Dakle, simetrija sigma σ_p je određena trouglovima ΔABC i $\Delta ABC'$. Ovo znači da se σ_p i transformacija π u ovom drugom slučaju poklapaju.

Teorema

Podudarnost figura je relacija ekvivalencije.

Definicija

Kažeemo da je figura F podudarna sa figurom F' i to zapisujemo ovako $F \cong F'$ ako postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(F)=F'$

Dokaz teoreme

Dokažimo da je podudarnost refleksivna, tj. da je $\pi(F)=F$.

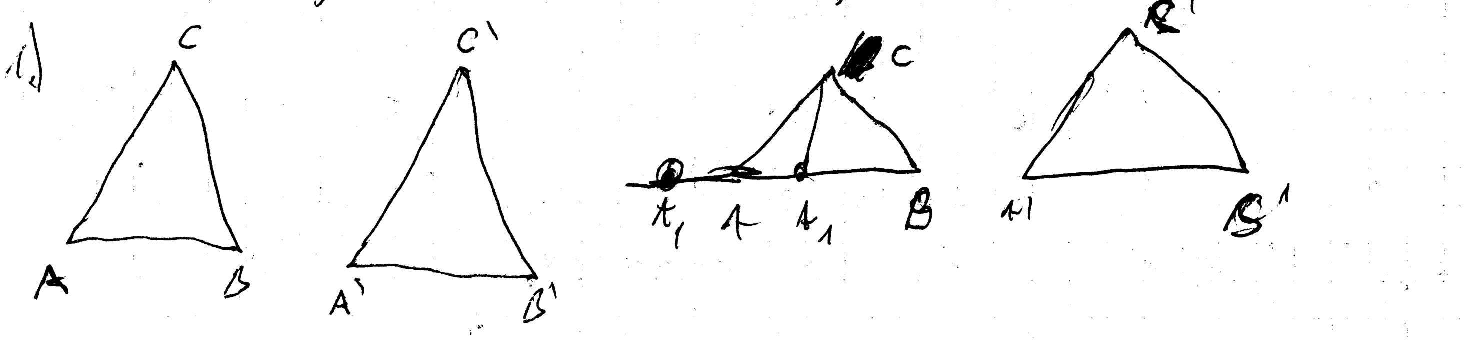
Zaista. $F = i(F) = \sigma_s \circ \sigma_s(F) = \pi(F)$

Neka je figura F podudarna sa figurom F'. Po definiciji postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(F)=F'$. Sada je $F=i(F) = \pi^{-1} \circ \pi(F) = \pi^{-1}(F')$. Kako je i π^{-1} transfor. podudarnosti to po definiciji znači da je $F' \cong F$.

Neka je $F \cong F'$ i $F' \cong F''$. Po definiciji to znači: Postoje transformacije podudarnosti π_1 i π_2 tako da je $F' = \pi_1(F)$ i $F'' = \pi_2(F')$.

Sada [illegible] je $F'' = \pi_2(F') = \pi_2 \circ \pi_1(F) = \pi_3(F)$. Naime π_1 i π_2 su proizvodi konačnog broja osnih simetrija pa je i π_3 proizvod konačnog broja osnih simetrija. Po definiciji to znači da je $F \cong F''$.

1)



Lema 2 sada se može iskazati ovako:
Ako u $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$ onda je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i unutrašnjost $\triangle ABC$ podudarna je unutrašnjosti trougla $\triangle A'B'C'$.
Na isti način kao što smo dokazali Lema 1 dokazujemo i sljedeću lemu:
Ako je $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$ onda postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(\measuredangle ab) = \measuredangle a'b'$. Pri tome se unutrašnjost $\measuredangle ab$ preslikava u unutrašnjost $\measuredangle a'b'$.
Pošto se sljedeće teoreme slično dokazuju dokazaćemo samo posljednju.

Prva teorema o podudarnosti trouglova

Ako je u troug. $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'AB'$ onda je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i unutrašnjost $\triangle ABC$ podudarna je unutrašnjosti $\triangle A'B'C'$.

Druga teorema o podudarnosti trouglova.

Ako je u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, $AB \cong A'B'$, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$ i $\measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A'$ onda je tr. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i unutrašnjost trougla $\triangle ABC$ podud. je unut. tr. $\triangle A'B'C'$.

Treća teorema o podudarnosti trouglova

Ako je u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$ onda je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i unutrašnjost trougla $\triangle ABC$ poduda. unut. $\triangle A'B'C'$.

Četvrta teorema pod. troug.

Ako je u trouglovima ΔABC i $\Delta A'B'C'$, $AB \cong A'B'$, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$ i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'$ onda je tr. ΔABC pod. $\Delta A'B'C'$ i unutrašnjost ΔABC pod. un. $\Delta A'B'C'$.

Peta teorema pod. tr.

Ako je u ΔABC i $\Delta A'B'C'$ $AC \cong A'C'$ $BC \cong B'C'$ $AC > BC$ i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$ onda je ΔABC podud. $\Delta A'B'C'$ i unutrašnjost ΔABC podudaran je unutrašnjosti $\Delta A'B'C'$

Dokaz

Po pretpostavci teoreme je $AC > BC$ pa odatle slijedi (1) $\measuredangle ABC > \measuredangle BAC$. Dalje, pošto je $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$ to postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(\measuredangle A'B'C') = \measuredangle ABC$. Pri tome je $\pi(B') = B$, $\pi(\overset{\circ}{B'A'}) = \overset{\circ}{BA}$ i $\pi(\overset{\circ}{B'C'}) = \overset{\circ}{BC}$ te $\pi(C') = C$ jer je $BC \cong B'C'$. Ako se dogodi da je $\pi(A') = A$ dokaz je završen. Ako to nije onda $\pi(A') = A_1 \in \overset{\circ}{BA}$ (pripada polupravoj). Sada se može dogoditi da je $B\text{-}A_1\text{-}A$ ili je $B\text{-}A\text{-}A_1$. Razmotrimo prvi slučaj. Iz $\pi(C') = C$ i $\pi(A') = A_1$ slijedi da je $A'C' \cong A_1C$. Kako je po pretpostavci $AC \cong A'C'$ to je $A_1C \cong AC$. Trougao AA_1C je jednakokraki i pritome je $\measuredangle AA_1C$ spoljašnji ugao za trougao A_1BC. Kao posljedicu imamo $\measuredangle CAB \cong \measuredangle AA_1C$ a taj je veći (>) $> \measuredangle ABC$. Ovo je kontradiktorno sa (1) pa ne može biti BA_1A.

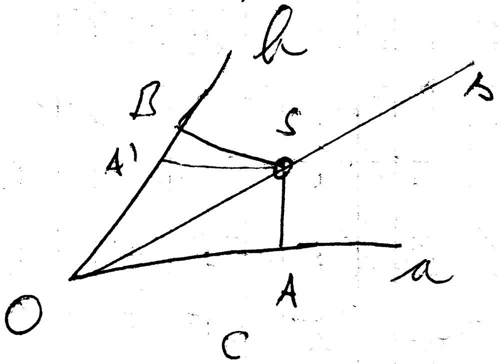
Neka je BAA_1. Opet je $A_1C \cong AC$ i pošto je

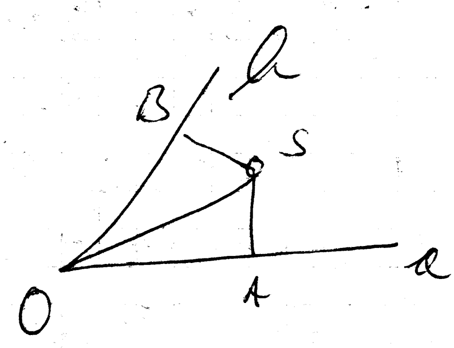
$AC > BC$ to je $A_1C > BC$. Sada u trouglu $\triangle A_1BC$ imamo (2) $\sphericalangle A_1BC > \sphericalangle BA_1C$. Trougao $\triangle A_1AC$ je jednakokraki pa je $\sphericalangle CA_1B$ podudaran $\cong \sphericalangle A_1AC$. Ovaj drugi ugao je spoljašnji za $\triangle ABC$ pa imamo $\sphericalangle CA_1B \cong \sphericalangle A_1AC > \sphericalangle ABC$. To je kontradiktorno sa (2). Znači nije ni BAA_1. Prema tome mora biti $\pi(A') = A$ i teorema je dokazana.

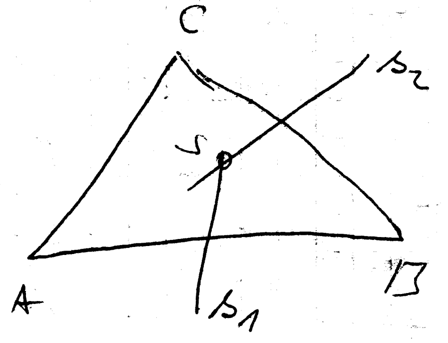
Primene transformacija podudarnosti

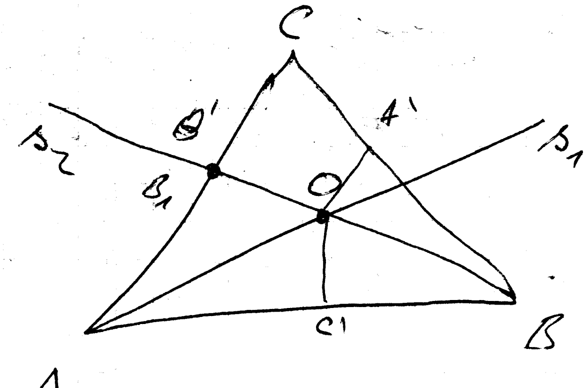
Definicija

Trougao u kojem je jedan ugao pravi zove se pravougli. Stranica naspram pravog ugla zove se hipotenuza, a druge dvije stranice zovu se katete. Hipotenuza je veća od katete.









Teorema

Uočimo ugao $\sphericalangle ah$ čije je teme tačka O. Neka je s simetrala toga ugla i $S \in s$, $SA \perp a$, SB

$\underline{SB} \perp b$, $B \in b$. Tvrdimo $SA \cong SB$. Obrnuto. Neka je S tačka u unutrašnjoj oblasti $\sphericalangle ab$, $\underline{SA} \perp a$ $A \in a$, $\underline{SB} \perp b$, $B \in b$ i $SA \cong SB$. Tvrdnja prava $\underline{OS}$ je simetrala ugla $\sphericalangle ab$.

Dokaz

Pošto je s simetrala ugla $\sphericalangle ab$ to je $G_s(O)=O$, $G_s(S)=S$. Ako je pri tome $G_s(A)=B' \neq B$ dobijamo slijedeće:

ugao $\sphericalangle OAS \cong \sphericalangle OB'S$. Pošto je prvi ugao pravi to je i ugao $\sphericalangle OB'S$ pravi. Na taj način u tački S postoje dvije prave $\underline{SB}$ i $\underline{SB'}$ normalne na pravu b. Dobijena kontradikcija pokazuje da mora biti $G_s(A)=B$. Sada slijedi $SA \cong SB$.

Obrnuto. Iz pretpostavke slijedi da su $\triangle OAS$ i OBS pravougli i pritome je $OS \cong OS$, $SA \cong SB$, $OS > AS$ i $OS > BS$. Ispunjene su pretpostavke pete teoreme o podudarnosti trouglova pa je ~~trougao~~ $\triangle OAS \cong \triangle OBS$. Odavde slijedi da postoji transformacija podudarnosti π tako da je $\pi(O)=O$, $\pi(S)=S$ i $\pi(A)=B$. Kao što znamo π je ili identična transformacija ili osna simetrija. Kako je $A \neq B$ π nemože biti identična transformacija pa slijedi da je π osna simetrija a osna simetrija je prava $\underline{OS}$. $G_{OS}(a)=b$.

Teorema

Ako postoji presječna tačka simetrala dviju stranica trougla onda i simetrala treće stranice sadrži istu tačku.

Dokaz (uslovan)

Neka je s_1 simetrala stranice AB a s_2 sim. str. BC.
Ako se prave s_1 i s_2 sijeku u tački S onda je:
$S \in s_1$ slijedi $AS \cong BS$, $S \in s_2 \Rightarrow BS \cong CS$.
Odavde slijedi da je $AS \cong CS$ što znači da tačka S pripada i simetrali s_3 stranice AC.

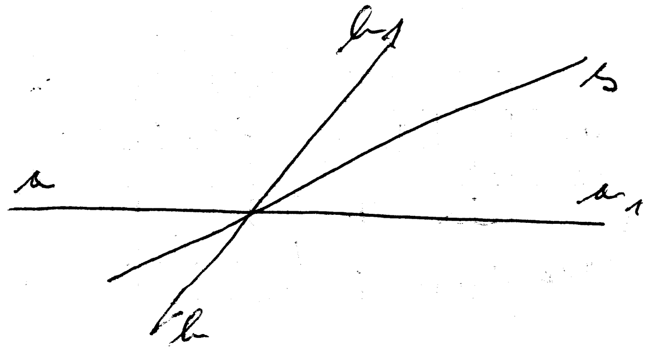
Teorema

Simetrale uglova trouglova sijeku se u jednoj tački.

Dokaz

Neka je s_1 simetrala ugla $\angle CAB$ a s_2 simetrala $\angle ABC$. Prava s_2 je sadržana u unutrašnjoj oblasti ugla $\angle ABC$ pa postoji tačka B_1 tako da je $\{B_1\} = s_2 \cap AC$. Prava s_1 je sadržana u unutrašnjoj oblasti ugla $\angle CAB$ tj. $\angle B_1AB$ pa postoji tačka O tako da je $\{O\} = s_1 \cap BB_1$. Neka je $\underline{OC'} \perp \underline{AB}$, $C' \in \underline{AB}$, $\underline{OB'} \perp \underline{AC}$, $B' \in AC$

$\underline{OA'} \perp \underline{BC}$, $A' \in BC$. Pošto je O element s_1 to je $OC' \cong OB'$. Pošto je $O \in s_2$ to je $OC' \cong OA'$. Otuda slijedi da je $OB' \cong OA'$ pa po drugom dijelu teoreme i slijedi da tačka O pripada i simetrali s_3 $\angle ACB$.



Teorema

Za svaku transformaciju pod.udarnosti π i za svaku pravu s vrijedi: $\sigma_{\pi(s)} = \pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1}$ $\sigma_{\pi(s)}$

Dokaz

Transformacija π pravu s preslikava na pravu $\pi(s)$ i neka je X proizvoljna tačka prave $\pi(s)$ $\Rightarrow \pi^{-1}(X) \in s$. Otuda je $\sigma_s(\pi^{-1}(X)) = \pi^{-1}(X)$. Djelujući sa lijeve strane sa π dobiamo $\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1}(X) = X$ dakle transformacija $\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1}$ preslikava svaku tačku prave $\pi(s)$ na tu istu tačku. Kao što znamo ova transformacija je tada ili identična transformacija ili osa simetrije pri čemu je osa simetrije prava $\pi(s)$:

$$\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1} = i$$

$$\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1} = \sigma_{\pi(s)}$$

Pretpostavimo da je $\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1} = i$. Delujući sa desne strane sa π dobijamo $\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1} \circ \pi = \pi$ tj. $\pi \circ \sigma_s = \pi$. Djelujući sa lijeve strane sa π^{-1} dobivamo:

$\pi^{-1} \circ \pi \circ \sigma_s = \pi^{-1} \circ \pi$ tj. $\sigma_s = i$. Po svojoj definiciji osna simetrija nije ident. transformacija pa je $\pi \circ \sigma_s \circ \pi^{-1} = \sigma_{\pi(s)}$.

Teorema

Neka je s simetrala $\measuredangle ab$ $\measuredangle a_1 b_1$ i $a_1 \subset a$ i $b_1 \subset b$,

Tada je $\sigma_b \circ \sigma_s \circ \sigma_a \circ \sigma_s = i$

Dokaz

Pošto je s simetrala ugla to je $\sigma_s(a) = b$ sada je $\sigma_b = \sigma_{\sigma_s(a)} = \sigma_s \circ \sigma_a \circ \sigma_s^{-1} = \sigma_s \circ \sigma_a \circ \sigma_s$ pri tome smo primjenili prethodnu teoremu i koristili smo činjenicu

da je osna simetrija involucija.
Djelujući sa lijeve strane sa σ_b dobijemo $\sigma_b \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_s \circ \sigma_a \circ \sigma_s$, kako je $\sigma_b \circ \sigma_b = i$ dokazali smo tvrdnju. Na isti način se dokazuje i sljedeća teorema.

Teorema:

Neka je s simetrala duži AB, a prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravu AB i b prava koja sadrži B i normalna je na pravu AB.
Vrijedi: $\sigma_b \circ \sigma_s \circ \sigma_a \circ \sigma_s = i$

Teorema:

Vrijedi $a \perp b$ akko $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b$

Dokaz:

Predpostavimo da je $a \perp b$ tada je $\sigma_b(a) = a$
otuda je $\sigma_a = \sigma_{\sigma_b(a)} = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b^{-1} = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b$
Djelujući sa lijeve strane sa σ_b dobijamo:

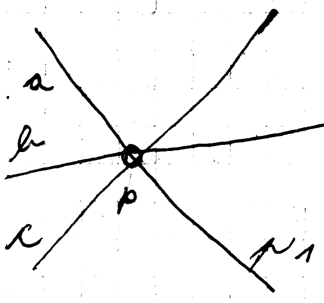
$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_a \cdot \sigma_b$$

Neka je sada $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b$. djelujući sa ~~...~~ desne ~~...~~ strane sa σ_b imamo:

$$\sigma_b \circ \sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_b \quad \text{tj.} \quad \sigma_b \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_a$$

odavde je $\sigma_{\sigma_b(a)} = \sigma_a$. Posljednja jednakost je moguća akko $\sigma_{b(a)} = a$ a po definiciji osne simetrije to je moguće samo ako je $a \perp b$.

Rotacija



Teorema:

Proizvod 2 osne simetrije nije osna simetrija.

Dokaz

Dokaz ćemo izvesti indirektnim putem. Neka je $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c$ uzmimo proizvoljnu tačku P na c. Tada je $\sigma_b \circ \sigma_a(P) = \sigma_c(P) = P$ otuda je $\sigma_a(P) = \sigma_b(P) = P'$. Iz $\sigma_a(P) = P'$ slijedi da je prava a simetrala duži PP'. Iz $\sigma_b(P) = P'$ slijedi da je prava b simetrala duži PP' to je moguće ako je $a \equiv b$ pa dobijamo $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c$ tj. $\sigma_c = i$. Dobijena kontradikcija pokazuju da nemože biti $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c$.

Definicija

Pramen pravih u ravni je skup pravih koje ili su incidentne sa istom tačkom ili su normalne na istu pravu. U prvom slučaju pramen je eliptični a tačka sa kojom su incidentni svi elementi pramena zove se središte ili centar pramena. U drugom slučaju pramen je hiperbolični a prava na koju su normalni svi elementi ~~pravca~~ pramena zove se bazisna prava pramena.

Teorema

Proizvod 3 osne simetrije sa osama iz istog ~~pravca~~ pramena je osna simetrija. Njena osa je element istog pramena.

Dokaz

Neka su prave a, b i c elementi istog eleptičnog pramena pravih sa centrom u P. Tačka P određuje na pravoj a 2 poluprave. Jednu od njih označimo sa a_1 i slovno $\sigma_c \circ \sigma_b (a_1) = a_1'$. Označimo sa s simetralu $\measuredangle a_1 a_1'$. Sada je $\sigma_s(a_1) = a_1'$, $\sigma_s(a_1') = a_1$. Odavde dobivamo $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b (a_1) = \sigma_s(a_1') = a_1$. Transformacije $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_b$ preslikava polupravu a_1 na tu istu polupravu pa je ona ili identična transformacija ili osna simetrija čija je osa prava a

$\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_a = 1$ $\quad$ $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_a$

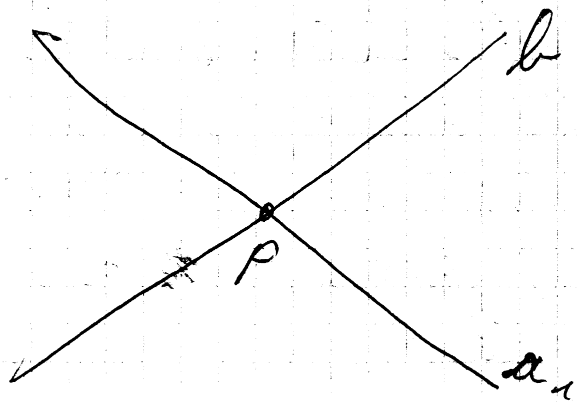
Ako bi bilo $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_a = i$ dobijamo: $\sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_s$ a dokazali smo da proizvod 2 osne simetrije nije osna simetrija pa vrijedi $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_a$. Djelujući sa desne strane sa σ_a dobijamo: $\sigma_s \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_a = i$. Ako sad sa lijeve strane djelujemo sa σ_s dobijamo $\sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_a = \sigma_s$.

Neka su sada prave a, b i c elementi istog hiperboličnog pramena pravih i neka je p bazisna prava pramena. Dalje neka je $\{P\} = a \cap p$ i slovno $\sigma_c \circ \sigma_b (P) = P_1$. Pošto je $b \perp p$ $c \perp p$ to i $P_1 \in p$. Tačka P na pravoj a određuje 2 poluprave. Jednu od njih označimo sa a_1 i slovima $\sigma_c \circ \sigma_b (a_1) = a_1'$. Označimo sa s simetralu duži PP_1. Dalji dio dokaza ide potpuno isto kao u prethodnom slučaju.

Definicija

Rotacija je proizvod 2 osne simetrije sa osama istog

eliptičnog pramena pravih. Centar pramena je centar rotacije. Označavamo: $S_P = \sigma_b \circ \sigma_a$, $\{P\} = a \cap b$
Rotacija je dakle određena uređenim parom pravih koje se sijeku. Može se dokazati da se jedna od tih pravih u odgovarajućem pramenu može proizvoljno izabrati.



Da bismo dokazali posljednju tvrdnju mi najprije moramo dokazati sljedeću lemu:
L1. Dva uređena para pravih istog pramena pravih određuju istu rotaciju ako postoji proizvod parnog broja osnih simetrija sa osama iz istog pramena pravih, koje prvi par pravih preslikava na drugi.

Dokaz

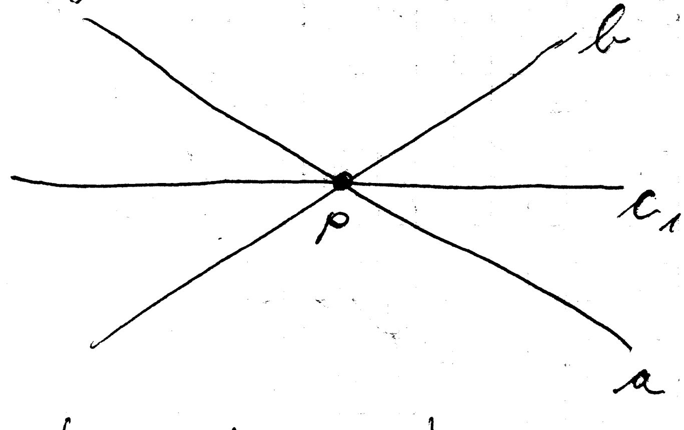
Neka su prave a i b elementi istog eliptičnog pramena pravih sa centrom u P, time je određena rotacija $\sigma_a \circ \sigma_a$. Neka su prave c i d proizvoljne prave od kojih svaka sadrži tačku P. Pretpostavimo da u pramenu sa centrom u P postoje prave m i n tako da je $c = \sigma_m \circ \sigma_n(a)$ i $d = \sigma_m \circ \sigma_n(b)$. Pokažimo da je $\sigma_m \circ \sigma_n$ ona transformacija o kojoj se govori u teoremi. Zaista, pošto se svaka transformacija podudarnosti može prikazati kao proizvod najviše 3 osne simetrije to su proizvod parnog broja osnih simetrija svodi na proizvod 2 simetrije. Prema tome

trebamo dokazati da je: $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c$.
Pošto je $c=\sigma_m\circ\sigma_n(a)$ to je: $\sigma_c=\sigma_{\sigma_m\circ\sigma_n(a)}=$
$=\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_a\circ(\sigma_m\circ\sigma_n)^{-1}=\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_a\circ\sigma_n\circ\sigma_m$
Pošto je $d=\sigma_m\circ\sigma_n(b)$ to je $\sigma_d=\sigma_{\sigma_m\circ\sigma_n(b)}=$
$=\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_b\circ\sigma_m\circ\sigma_n$ sada je $\sigma_d\circ\sigma_c=\sigma_m\circ\sigma_m\circ$
$\circ\sigma_b\circ\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_a\circ\sigma_n\circ\sigma_m=\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_m\circ\sigma_n$

$\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_b$ je proizvod tri osne simetrije sa osama iz istog pramena i taj je proizvod osna simetrija pa vrijedi: $\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_b=(\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_b)^{-1}$
$=\sigma_b\circ\sigma_n\circ\sigma_m$
Isto tako je $\sigma_a\circ\sigma_n\circ\sigma_m=(\sigma_a\circ\sigma_n\circ\sigma_m)^{-1}=\sigma_n\circ\sigma_m\circ\sigma_a$
sada je $\sigma_d\circ\sigma_c=\sigma_b\circ\sigma_n\circ\sigma_m\circ\sigma_n\circ\sigma_a=\sigma_b\circ\sigma_a$
Primjedba: Primjetimo da isti zaključak vrijedi i u slučaju kada su a i b elementi istog hiperboličnog pramena pravih.

Teorema

Rotacija je određena uređenim parom pravih od kojih se jedna u pravcu čiji je centar, centar rotacije, može proizvoljno izabrati.



Dokaz

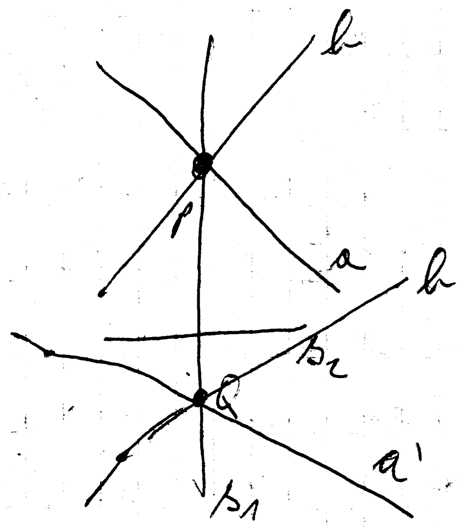
Uočimo rotaciju $\sigma_b\circ\sigma_a$ gdje je $a\cap b=\{P\}$. Neka je c proizvoljna prava u istom pramenu. Tačka P na pravoj a određuje dvije poluprave pa jednu od njih označimo sa a_1. Isto tako tačka P na pravoj c određuje 2 poluprave pa jednu od njih označimo sa c_1 i neka je s simetrala $\sphericalangle a_1 c_1$. Tada je $\sigma_s(a) = c$. Odavde je $\sigma_c \circ \sigma_s(a) = \sigma_c(c) = c$. Ako stavimo $\sigma_c \circ \sigma_s(b) = d$ onda prava d sadrži tačku P, tj. pripada istom ~~procesu~~ pramenu pa na osnovu prethodne leme dobivamo $\sigma_a \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c$. Isto tako tačka P na pravoj b određuje dvije poluprave pa jednu od njih označimo sa b_1 i sa s_1 simetralu $\sphericalangle b_1 c_1$. Sada je $\sigma_{s_1}(b) = c$. Odavde je $\sigma_c \circ \sigma_{s_1}(b) = c$. Ako stavimo $\sigma_c \circ \sigma_{s_1}(a) = d_1$, onda d_1 pripada istom pramenu i na osnovu prethodne leme je $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_{d_1}$. Dakle, proizvoljna prava c može biti prva a može biti i druga prava u posmatranom pramenu.

<u>Primjedba:</u> Primjetimo da proizvod $\sigma_a \circ \sigma_a$ možemo posmatrati i u slučaju kada su prave a i b elementi istog hiperboličkog pramena pravih.

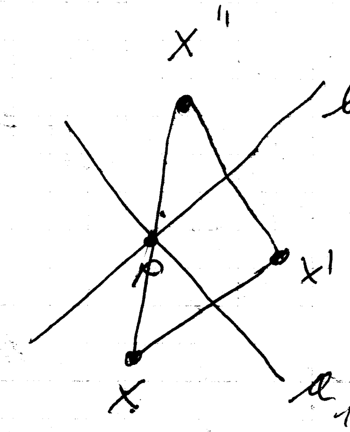
Označimo sa A skup svih uređenih parova pravih u ravni pri čemu je svaki par, par pravih koje se sijeku.

<u>Definicija:</u> Za 2 elementa skupa A kažemo da su u relaciji ψ ako postoji transformacija podudarnosti jedne vrste koja jedan od njih preslikava na drugi.

ψ - PSI



$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$



$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \overset{def}{=\!=} \quad \rho_{P,\hat{\gamma}} = \rho_{P,\hat{\beta}} \circ \rho_{P,\hat{\alpha}}$$

Pošto je Ψ (psi) relacija ekvivalencije ona u skupu A određuje particiju na klase ekvivalencije.

<u>Definicija:</u>

Klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju Ψ je orjentisani ugao.

Orjentisani ugao je, dakle, skup svih uređenih parova pravih koji se mogu dobiti jedan iz drugog transformacijom podudarnosti prve konstrukcije. Ako je (a, b) jedan element tog skupa $a \cap b = \{P\}$ a (e, f), $(e \cap f) = \{Q\}$ drugi element tog skupa onda je (a, b) jedna reprezentacija a (e, f) druga reprezentacija istog orjentisanog ugla. S druge strane par (a, b) određuje rotaciju $\sigma_b \circ \sigma_a$. Ako u pramenu sa centrom u P postoje prave m i n takve da je $c = \sigma_m \circ \sigma_n(a)$ a $d = \sigma_m \circ \sigma_n(b)$ onda je i (c, d) jedna orjentacija istog orjentisanog ugla. Takođe je očito da svaka ~~orjentacija~~ rotacija određuje reprezentaciju jednog orjentisanog ugla. Prema tome vrijedi: neka je P proizvoljna tačka u ravni. Skup orjentisanih uglova je u obostrano jednoznačnoj korespodenciji sa skupom svih rotacija sa centrom u P. Neka je uređeni par (a,b) $a\cap b=\{P\}$ reprezentacija jednog orjentisanog ugla i Q proizvoljna tačka u ravni različita od P. Pravu $\underline{PQ}$ označimo sa s_1 a sa s_2 označimo simetralu duži PQ. Ako je $a'=\sigma_{s_2}\circ\sigma_{s_1}(a)$ i $b'=\sigma_{s_2}\circ\sigma_{s_1}(b)$ onda je i par (a',b') reprezentacija istog orjentisanog ugla. Odgovarajuće rotacije su $\sigma_b\circ\sigma_a$ i $\sigma_{b'}\circ\sigma_{a'}$. Prva je sa centrom u P a druga je sa centrom u Q. Dogovaramo se da ćemo orjentisane uglove označavati ovako: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ ... Odgovarajuće orjentacije označavati ćemo sa $\rho_{P,\hat{\alpha}}$, $\rho_{P,\hat{\beta}}$ itd.

<u>Primjedba</u>: Primjetimo da nailazimo i na oznaku $\rho_{P,2\hat{\alpha}}$. Neka je $\rho_{P,\alpha}=\sigma_b\circ\sigma_a$ gdje je $a\cap b=\{P\}$ i $x'=\sigma_a(x)$ i $x''=\sigma_b(x')$. Tada je $PX\cong PX'\cong PX''$ a ugao $\sphericalangle XPX''\cong 2\sphericalangle a_1b_1$ gdje je $\sphericalangle a_1b_1$ jedan od elementarnih uglova koje određuju prave a i b, i pri tome je uređeni par (a,b) jedna reprezentacija orjentisanog ugla $\hat{\alpha}$. To objašnjava oznaku $\rho_{P,2\alpha}$. Mi ćemo uvijek rotacije označavati po našem dogovoru.

Definicija $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \overset{def}{=\!=} \rho_{P,\hat{\gamma}} = \rho_{P,\hat{\beta}} \circ \rho_{P,\hat{\alpha}}$

$\hat{\gamma} = -\hat{\alpha} \overset{def}{=\!=} \rho_{P,\hat{\gamma}} = (\rho_{P,\hat{\alpha}})^{-1}$

$\hat{\gamma} = \hat{0} \overset{def}{=\!=} \rho_{P,\hat{\gamma}} = i$

$\hat{\gamma}$ je ravan ugao $\overset{def}{=\!=} \rho_{P,\hat{\gamma}} = \sigma_a \circ \sigma_b$, $a \perp b$

Teorema
Definisano sabiranje u skupu orjentisanih uglova zadovoljava sljedeće uslove:
a) $\hat{\alpha} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$
b) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$
c) $\hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}) = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\gamma}$

Dokaz
Osobina a) je neposredna posljedica definicije. Dokazaćemo osobinu b) jer se osobina c) dokazuje slično s tim što se u obzir treba uzeti asocijativnost proizvoda preslikavanja. Po definiciji

$\rho_{P,\hat{\alpha}+\hat{\beta}} = \rho_{P,\hat{\beta}} \circ \rho_{P,\hat{\alpha}}$ a $\rho_{P,\hat{\beta}+\hat{\alpha}} = \rho_{P,\hat{\alpha}} \circ \rho_{P,\hat{\beta}}$

Iz dokazanih teorema o osobinama rotacije slijedi da se reprezentacije dva orjentisana ugla unijed mogu izabrati tako da imaju zajedničko tjeme i da druga prava prvog ugla bude istovremeno prva prava drugog ugla. Dakle, ako je $S_{P,\hat\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_a$ onda je $S_{P,\hat\beta} = \sigma_c \circ \sigma_b$. Sada je

$$S_{P,\hat\alpha+\hat\beta} = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_a$$

Također znamo da u istom pramenu sa centrom u P postoje b' i c' tako da je $S_{P,\hat\alpha} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{a'}$

a $S_{P,\hat\beta} = \sigma_b \circ \sigma_a$ / $S_{P,\hat\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_a$, $S_{P,}$

$$S_{P,\hat\beta+\hat\alpha} = S_{P,\hat\alpha} \circ S_{P,\hat\beta} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{a'} \circ \sigma_{a'} \circ \sigma_a = \sigma_{c'} \circ \sigma_a$$

Kako je $S_{P,\hat\alpha} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{a'}$ i $S_{P,\hat\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_a$ to je $\sigma_{c'} \circ \sigma_{a'} = \sigma_b \circ \sigma_a$. Otuda je $\sigma_{c'} = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_{a'}$

Sada je $S_{P,\hat\beta+\hat\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_{a'} \circ \sigma_a$. Također kako je $S_{P,\hat\beta} = \sigma_{a'} \circ \sigma_a$ a $S_{P,\hat\beta} = \sigma_c \circ \sigma_b$ dobijamo

$S_{P,\hat\beta+\hat\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_b$. Prave a, b i c su elementi istog pramena pravih pa je proizvod $\sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_b$ osna simetrija i vrijedi

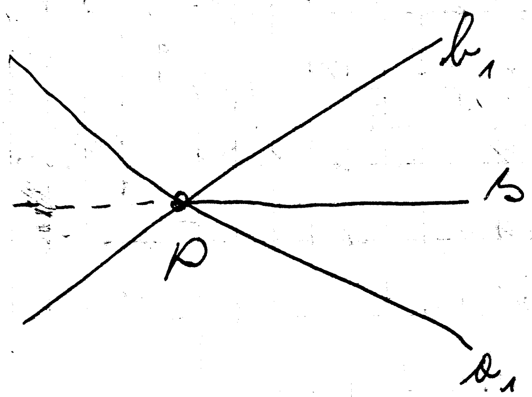
$$\sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a$$

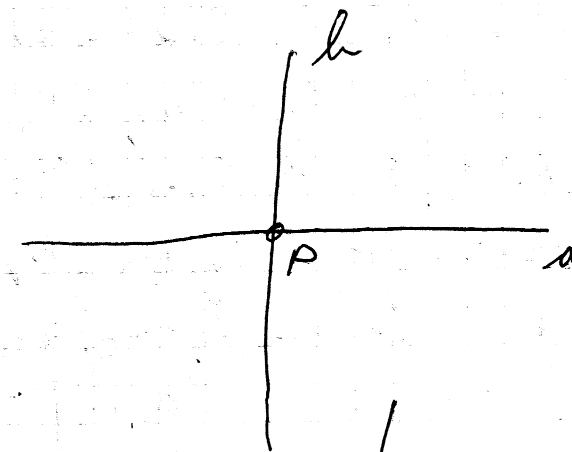
$\sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_a$

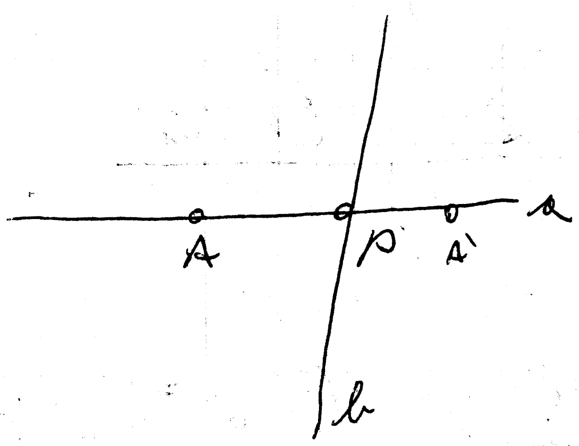
konačno dobivamo $\rho_{P,\hat{\beta}+\hat{\alpha}} = \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_a =$

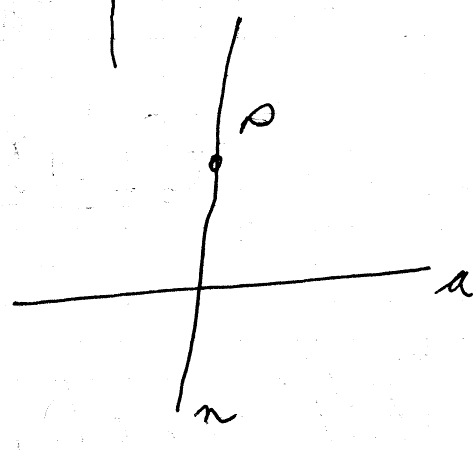
$$= \sigma_c \circ \sigma_a$$

što je i trebalo dokazati.









Primedba.

Primetimo prema definiciji $\hat{\gamma} = -\hat{\alpha}$ ustvari znači $\rho_{P,\hat{\gamma}} = (\rho_{P,\hat{\alpha}})^{-1}$. Tada je $\rho_{P,\hat{\alpha}} = \sigma_a \circ \sigma_a$ pa je par (a,b) jedna reprezentacija orijentisanog ugla $\hat{\alpha}$. Par (b,a) je reprezentacija orijentisanog ugla $\hat{\gamma} = -\hat{\alpha}$. Zbog toga se piše da je $(b,a) = -(a,b)$. Ako je a i c a

$b_1 \subset b$ te poluprave a_1 i b_1 imaju zajedničku početnu tačku P a s je simetrala $\measuredangle a_1 b_1$ onda je $[b, a) = \sigma_s(a, b] = -(a, b]$. Iz definicije znamo da su uređeni parovi (a, b) i (a', b') reprezentacije jednog istog orjentisanog ugla, ako postoji transformacija podudarnosti prve vrste koja jedan par preslikava na drugi. Proizvod osne simetrije i transformacije podudarnosti prve vrste je transformacija podudarnosti druge vrste. Zbog toga vrijedi: neka je par (a, b) reprezentacija orjentisanog ugla $\hat{\alpha}$. Par (a', b') je reprezentacija orjentisanog ugla $-\hat{\alpha}$, ako postoji transformacija podudarnosti druge vrste tako da je $\pi((a, b)) = (a', b')$

Centralna simetrija

Definicija

Centralna simetrija je rotacija $\rho_{P, \hat{\alpha}} = \sigma_b \circ \sigma_a$, $a \perp b$. Tačka $\{P\} = a \cap b$ zove se centar simetrije. Centralna simetrija označava se sa σ_P.

Iz ove definicije, definicije rotacije i osobina rotacije slijedi:

1. centralna simetrija je određena proizvoljnim parom normalnih pravih od koja svaka sadrži centar simetrije. Ovaj par pravih nemora biti uređen jer je $a \perp b$ pa je $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_b$.

2. Drugo $\sigma_P \circ \sigma_P = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_a = i$

2. Centralna simetrija je involucija.
3. Neka je tačka P centar simetrije, A proizvoljna tačka u ravni. Označimo sa a pravu $\underline{AP}$ a sa b pravu koja sadrži tačku P i normalna je na pravu a. Sada je

$$\sigma_P(a) = \sigma_b \circ \sigma_a(a) = \sigma_b(a) = a \quad i$$

$$\sigma_P(A) = \sigma_b \circ \sigma_a(A) = \sigma_b(A) = A'$$

Dakle prava koja sadrži centar simetrije preslikava se na tu istu pravu. Centar simetrije je središte duži koja je određena parom odgovarajućih tačaka.
Odmah primjetimo da vrijedi

$$\sigma_A \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_A \quad \text{ako je } A \in a$$

Sljedeća osobina
4. Unakrsni uglovi su centralno simetrični. Centar simetrije je zajedničko tjeme tih uglova.
5. Neka je P centar simetrije i a takva da $P \notin a$. Označimo sa m pravu koja sadrži tačku P i normalna je na pravu a. U simetriji σ_P je $\sigma_P(a) \perp \sigma_P(m)$.
Kako m sadrži centar simetrije to je $\sigma_P(m) = m$.
Znači prava i njena centralnosimetrična slika normalne su na istu pravu tj. pravu koja sadrži centar simetrije.

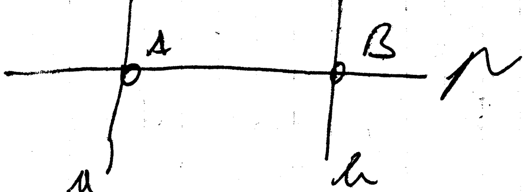
6. Centralna simetrija je transformacija podudarnosti prve vrste pa ona orijentisani ugao ~~~~ preslikava na samu sebe ili jednu reprezentaciju tog ugla preslikava na drugu njegovu reprezentaciju.

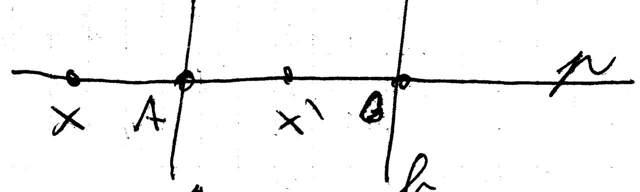
Translacija

Definicija

Translacija je proizvod $G_a \circ G_b$ dvije osne simetrije ako su prave a i b elementi istog hiperboličnog pramena pravih. Bazisna prava pramena je bazisna prava translacije. Translaciju označavamo sa τ (tau).

Translacija je dakle određena uređenim ~~~~ parom pravih istog hiperboličnog pramena pravih. Kao što znamo vrijedi lema: dva uređena para pravih istog hiperboličnog pramena pravih određuju istu translaciju ako postoji proizvod parnog broja osnih simetrija sa osama iz tog istog pramena a koji prvi par pravih preslikava na drugi par pravih. Također vrijedi i teorema: translacija se može zadati uređenim parom pravih od kojih se jedna u odgovarajućem pramenu može proizvoljno izabrati.





*Dokažimo sada da translacija nema dvojnu tačku. Dokaz ćemo izvesti indirektnim putem. Pretpostavimo suprotno: neka translacija $\mathcal{T} = \mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_a$ ima dvojnu tačku tj. neka vrijedi $\mathcal{T}(X) = X$ odnosno $\mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_a(X) = X$ pri čemu su prave a i b dvije različite prave istog hiperboličnog pramena pravih sa bazisnom pravom p. Sada je $\mathcal{G}_a(X) = \mathcal{G}_b(X) = X'$ i $\mathcal{G}_a(X) = X'$ slijedi da je prava a simetrala duži XX'. Iz $\mathcal{G}_b(X) = X' \Rightarrow$ da je prava b simetrala duži XX'. Dobivamo da jedna ista duž ima dvije različite simetrale što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da translacija nema dvojnu tačku.

<u>Teorema</u>

Svaka se translacija može prikazati kao proizvod dvije centralne simetrije. Vrijedi i obrnuto. Proizvod dvije centralne simetrije je translacija.

<u>Dokaz</u>

Uočimo translaciju $\mathcal{T} = \mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_a$ gdje su prave a i b elementi istog hiperboličnog pramena pravih sa bazisnom pravom translacije p. Neka je $\{A\} = p \cap a$ i $\{B\} = p \cap b$. Sada je

$$\mathcal{T} = \mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_a = \mathcal{G}_b \circ \underbrace{\mathcal{G}_p \circ \mathcal{G}_p}_{I} \circ \mathcal{G}_a = \mathcal{G}_B \circ \mathcal{G}_A$$

jer je $a \perp p$ i $b \perp p$.

Obratno – uočimo proizvod dvije centralne simetrije $\mathcal{G}_B \circ \mathcal{G}_A$ gdje su tačke A i B centri simetrija. Pravu $\underline{AB}$ označimo sa p a sa a označimo pravu koja sadrži tačku A i normalna je na pravu p i sa b označimo pravu koja sadrži tačku B i normalna je na p. Sada je

$$\sigma_A = \sigma_p \circ \sigma_a$$

$$\sigma_B = \sigma_p \circ \sigma_b \quad \text{pa onda je} \quad \sigma_B \circ \sigma_A =$$

$$= \sigma_b \circ \sigma_p \circ \sigma_a \circ \sigma_p = \sigma_b \circ \sigma_p \circ \sigma_p \circ \sigma_a =$$

$$= \sigma_b \circ \sigma_a = \tau$$

jer je $a \perp p$ i $b \perp p$

Iz prethodnog odmah slijedi posljedica: translacija je određena uređenim brojem tačaka.

Teorema

Dvije uređene dvojeke određuju istu translaciju akko su kolinearne, isto orijentisane a odgovarajuće duži podudarne.

Dokaz

Uočimo translaciju $\tau = \sigma_b \circ \sigma_a$ gdje su a i b elementi istog hiperboličnog pramena pravih sa bazisnom pravom p. Neka je

$$\{A\} = a \cap p$$

$$\{B\} = b \cap p \quad \text{a } X \text{ i } Y \text{ proizvoljne tačke na pravoj } p.$$

Ako je $X' = \sigma_a(X)$ $X'' = \sigma_b(X')$ onda je

$X'' = \sigma_b \circ \sigma_a(X)$ i vrijedi $AX \cong AX'$, $BX' \cong BX''$,

$XX'' \cong 2AB$ i $(X, X'') \uparrow\uparrow (A, B)$. Također je

$AY \cong AY'$

$BY' \cong BY''$

$YY'' \cong 2AB$ i $(Y, Y'') \uparrow\uparrow (A, B)$

Kako je relacija podudarnosti u skupu svih duži tranzitivna i kako je relacija iste orjentacije u skupu svih kolinearnih dvojki jedne prave također tranzitivna to je $XX'' \cong YY''$ i $(X, X'') \uparrow\uparrow (Y, Y'')$.

$X'' = \tau(X)$

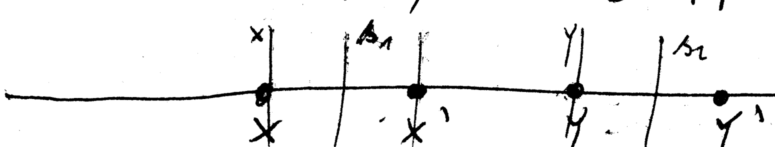
$Y'' = \tau(Y)$

Prema tome ako su X i Y proizvoljne tačke bazisne prave translacije onda je $X\tau(X) \cong Y\tau(Y)$ i $(X\tau(X)) \uparrow\uparrow (Y, \tau(Y))$.

Obrnuto - pretpostavimo da za uređene dvojke (X, X') i (Y, Y') vrijedi

1. Kolinearne su
2. $XX' \cong YY'$
3. uređena dvojka $(X, X') \uparrow\uparrow (Y, Y')$

Trebamo dokazati da postoji translacija τ tako da je: $X' = \tau(X)$, $Y' = \tau(Y)$



Odmah uočavamo da je translacija τ takva da je $\tau(X) = X'$ sigurno postoji. To je $\tau = \sigma_{s_1} \circ \sigma_x$ gdje je s_1 simetrala duži XX' a x je prava koja sadži tačku X a normalna je na pravu XX'. Potpuno analogno translacija τ_1 takva da je

$\tau_1(Y) = Y'$ sigurno postoji, to je:

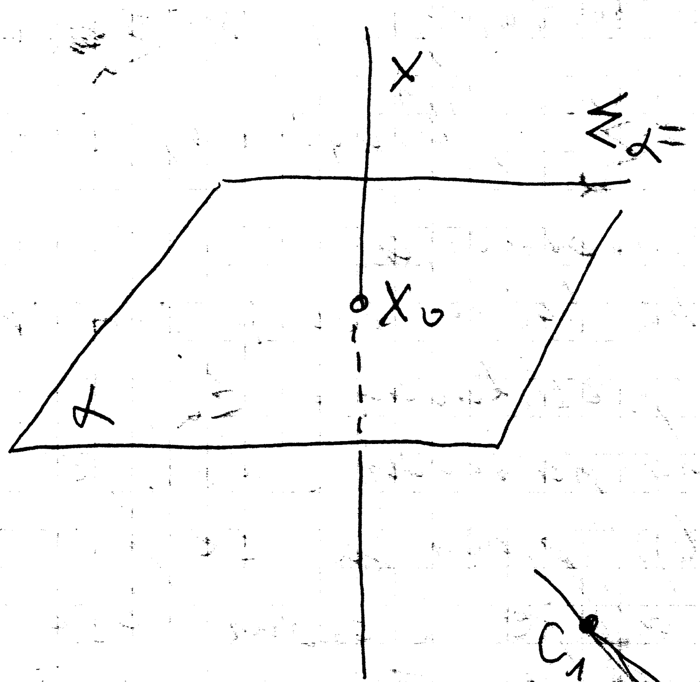
$\tau_1 = \sigma_{s_2} \circ \sigma_y$ gdje je s_2 simetrala duži YY' a y prava koja sadži Y a normalna je na pravu $\underline{YY'}$. Prave XX' i YY' su jedna te ista prava. Prave s_1, s_2, x i y su elementi istog hiperboličkog pramena pravih pa slijedi da je $\tau = \sigma_{s_1} \circ \sigma_x = \sigma_{s_2} \circ \sigma_y = \tau_1$. Da je poredak upravo onakav kako je napisan garantuje uslov 3.

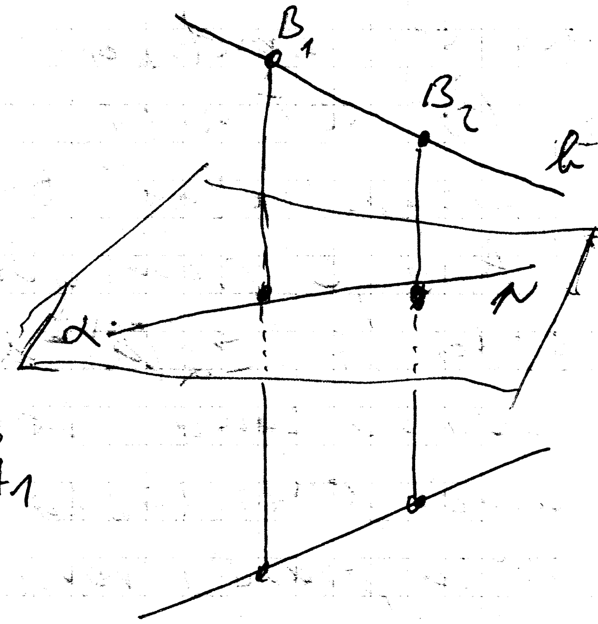
Simetrija u odnosu na ravan ili ravanska simetrija

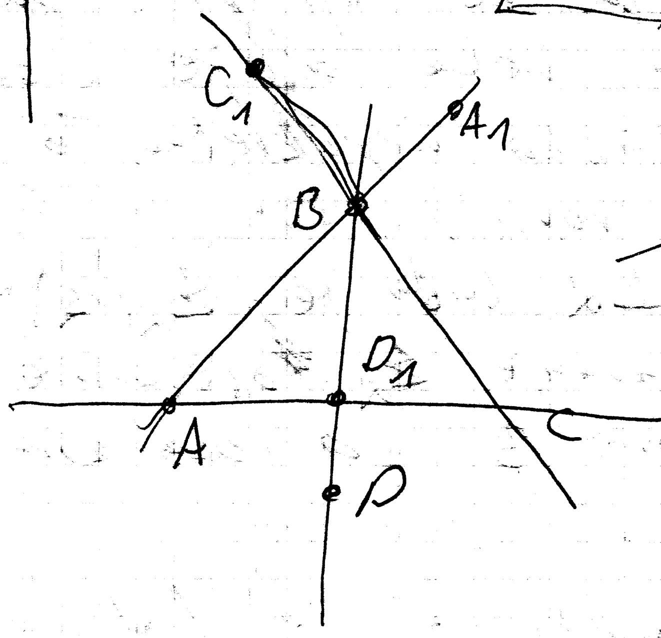
D

Neka je α proizvoljna ravan u prostoru i X proizvoljna tačka u tom istom prostoru. Svakoj tački X prostora pridružit ćemo tačku X' tog istog prostora tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. $X \in \alpha$ onda je $X' \equiv X$
2. ako $X \notin \alpha$ onda je $\underline{XX'} \perp \alpha$, $XX_0 \cong X_0X'$ gdje je $\{X_0\} = \underline{XX'} \cap \alpha$







Pošto za svaku tačku X i za svaku ravan α postoji jedna i samo jedna prava koja sadrži tačku X a normalna je na ravan α i pošto za svaku polupr. sa početnom tačkom X_0 postoji jedna i samo jedna tačka X' tako da je $X_0X' \cong X_0X$ to je skup svih mogućih dvojki (X, X') preslikavanjem prostora na samo sebe. To preslikavanje zove se ravanska simetrija ili simetrija u odnosu na ravan i označava se sa Σ_α (sigma α). Ravan α je ravan simetrije. Kao neposredne posledice dobivamo:

1. $x' = \Sigma_\alpha(x)$ ali je po definiciji i $x = \Sigma_\alpha(x')$ tj. $\Sigma_\alpha^2 = i$ ili $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha^{-1}$. Drugim riječima ravanska simetrija je involucija.

2. Po definiciji svaka tačka ravni simetrije je nepokretna tačka preslikavanja Σ_α.

3. Ako je prava normalna na ravan simetrije onda je $\Sigma_\alpha(a) = a$ tj. prava a se preslikava na samu sebe ali je u ovom slučaju samo jedna tačka nepokretna. To je presječna tačka prave i ravni.

4. Ako je $\beta \perp \alpha$ tada je $\Sigma_\alpha(\beta) = \beta$ pa se sada preslikavanje Σ_α ostvaruje kao osna simetrija u ravni β a osa simetrija prava $p = \alpha \cap \beta$.

Teorema
Ravanska simetrija je kolineacija. Ona preslikava polupravu na polupravu, a duž na podudarnu duž.

Dokaz: neka je α ravan simetrije i $b \not\subset \alpha$. Uočimo na pravoj b dvije tačke B_1 i B_2 i neka je $B_1' = \Sigma_\alpha(B_1)$ a $B_2' = \Sigma_\alpha(B_2)$. Tada je B_1B_1' normalna na α i $B_2B_2' \perp \alpha$. Prave b i B_1B_1' se sijeku pa određuju neku ravan β_1 i $\beta_1 \perp \alpha$. Isto tako b i B_2B_2' se sijeku pa određuju neku ravan β_2 i $\beta_2 \perp \alpha$. Ravni β_1 i β_2 imaju zajedničkih tačaka i kako su obje normalne na ravan α to se one poklapaju tj. $\beta_1 \equiv \beta_2$. Sada se posmatrana transfo_ rmacija može realizirati kao osna simetrija u ravni β_1 pri čemu je osa simetrije prava $p = \alpha \cap \beta_1$

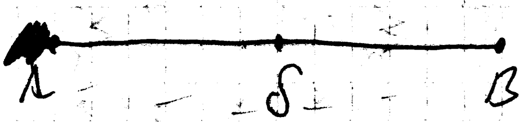
<u>Teorema</u>

Ravanska simetrija preslikava komplanarne tačke na komplanarne tačke.

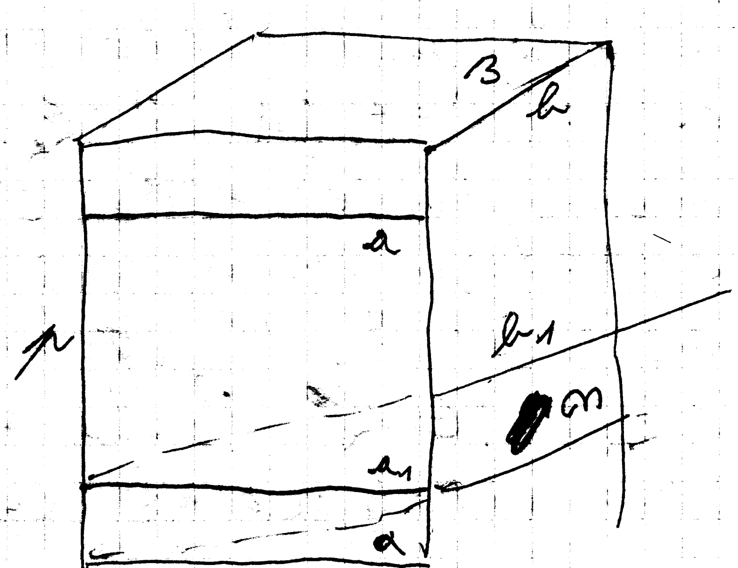
<u>Dokaz:</u> Neka je β proizvoljna ravan i A, B, C, D tačke u toj ravni, tako da su svake tri nekolinearne. Stavimo $A' = \Sigma_\alpha(A)$, $B' = \Sigma_\alpha(B)$, $C' = \Sigma_\alpha(C)$ i $D' = \Sigma_\alpha(D)$. Tada su i tačke A', B' i C' nekolinearne pa one određuju ravan $A'B'C'$ koje ćemo kraće označiti sa β'. Mi trebamo dokazati da tačka $D' = \Sigma_\alpha(D) \in \beta'$. Pošto su svake tri od uočenih tačaka nekolinearne to jedna od njih npr. D pripada jednom od uglova koji određuju prave AB i BC. Pa pretpostavimo da je tačka D u uglu $\measuredangle ABC$. Znamo da tada postoji tačka D_1 takva da je $\overrightarrow{BD} \cap AC = \{D_1\}$. Zbog naših pretpostavki $A'B', A'C', B'C' \in \beta'$. Kako $D_1 \in AC$ to $D_1' = \Sigma_\alpha(D_1) \in A'C'$. Dakle $D_1' \in \beta'$. Očito je da sada prava $B'D_1' \subset \beta'$. Pošto $D \in BD_1$ to $D' = \Sigma_\alpha(D) \in B'D_1' \subset \beta'$.

Ako tačka D pripada uglu koji je unakrsan uglu $\measuredangle ABC$ onda na pravoj AB uzmemo tačku A_1 tako da je $A \cdot B \cdot A_1$ a na pravoj BC uzmemo tačku C_1 tako da je $C B C_1$. I sada umjesto da polazimo od trougla ABC mi polazimo od $\triangle A_1 B_1 C_1$. Na isti način postupamo i u slučaju da tačka D pripada jednom od uglova ABC_1, CBA_1.

Kao neposredne posljedice imamo: ravanska simetrija preslikava poluravan na poluravan, ugao na podudaran ugao i normalne prave na normalne prave. Ako je $\alpha \perp \beta$ onda ravanska simetrija Σ_α čuva normalne prave i ravni tj. vrijedi $\Sigma_\alpha(\alpha) \perp \Sigma_\alpha(\beta)$



m-mi



Definicija simetralne ravni duži

Ravan δ (delta) je simetralna ravan ili ravan simetrije duži AB ako δ sadrži središte S duži AB, ako je δ normalna na pravu AB. Iz ove definicije i naprijed razmatranog gradiva odmah slijede ove osobine:

1. simetralna ravan duži jednoznačno je određena
2. potreban i dovoljan uslov da ravan δ bude simetralna ravan duži AB je $\Sigma_\delta(A) = B$
3. ako tačka P pripada simetralnoj ravni duži AB onda je $AP \cong BP$.
4. Ako je $AP \cong BP$ onda simetralna ravan δ duži AB sadrži tačku P.

Definicija simetralne ravni ugla

Ravan δ je simetralna ravan ili ravan simetrije ugla $\sphericalangle ab$ ako δ sadrži simetralu ugla i normalna je na ravan ugla.

Neposredne posljedice ove definicije i naprijed razmatranog gradiva su: 1. simetralna ravan ugla jednoznačno je određena i 2. potreban i dovoljan uslov da ravan δ bude simetralna ravan $\sphericalangle ab$ je $\Sigma_\delta(a)=b$.

Definicija ugla normalnog presjeka diedra

Ugao normalnog presjeka diedra $\sphericalangle \alpha\beta$ je: $\sphericalangle ab = \sphericalangle \alpha\beta \cap \pi$ gdje je π ravan koja je normalna na ivicu diedra.

Teorema

Svi uglovi normalnih presjeka diedra su podudarni.

Dokaz: Uočimo diedar $\sphericalangle \alpha\beta$ čija je ivica prava p. Neka je $\sphericalangle ab$ jedan i $\sphericalangle a_1b_1$ drugi ugao normalnog presjeka diedra $\sphericalangle\alpha\beta$. Po definiciji to znači $\sphericalangle ab = \sphericalangle\alpha\beta \cap \pi$, $\pi \perp p$, ~~[illegible]~~ Iz definicije diedra i ugla normalnog na diedar odmah slijedi: $a \perp p$, $b \perp p$, $a_1 \perp p$, $b_1 \perp p$, $\alpha \perp \pi$, ~~[illegible]~~ $\beta \perp \pi$, $\alpha \perp \pi_1$, $\beta \perp \pi_1$. Neka je P tjeme ugla $\sphericalangle ab$ i P_0 središte duži PP_1. Označimo sa π_0 ravan koja sadrži tačku P_0 i normalna je na pravu ~~[illegible]~~ i posmatrajmo trasformaciju Σ_{π_0}. Odmah slijedi da je $\Sigma_{\pi_0}(P)=P_1$

$\Sigma_{m_0}(\alpha) = \alpha$ i $\Sigma_{m_0}(\beta) = \beta$). U pomenutoj transformaciji poluprava a čija je početna tačka P koja leži u ravni α i normalna je na pravu p, preslikava se na polup. čija je početna tačka P_1 koja leži u ravni α i normalna je na pravu p. To je poluprava a_1. Dakle $\Sigma_{m_0}(a) = a_1$. Na isto način dokazujemo da je $\Sigma_{m_0}(b) = b_1$. Drugim riječima transformacija Σ_{m_0} preslikava ugao $\measuredangle ab$ na $\measuredangle a_1 b_1$ pa je ~~ugg~~ $\measuredangle ab \cong \measuredangle a_1 b_1$.

Primjedba

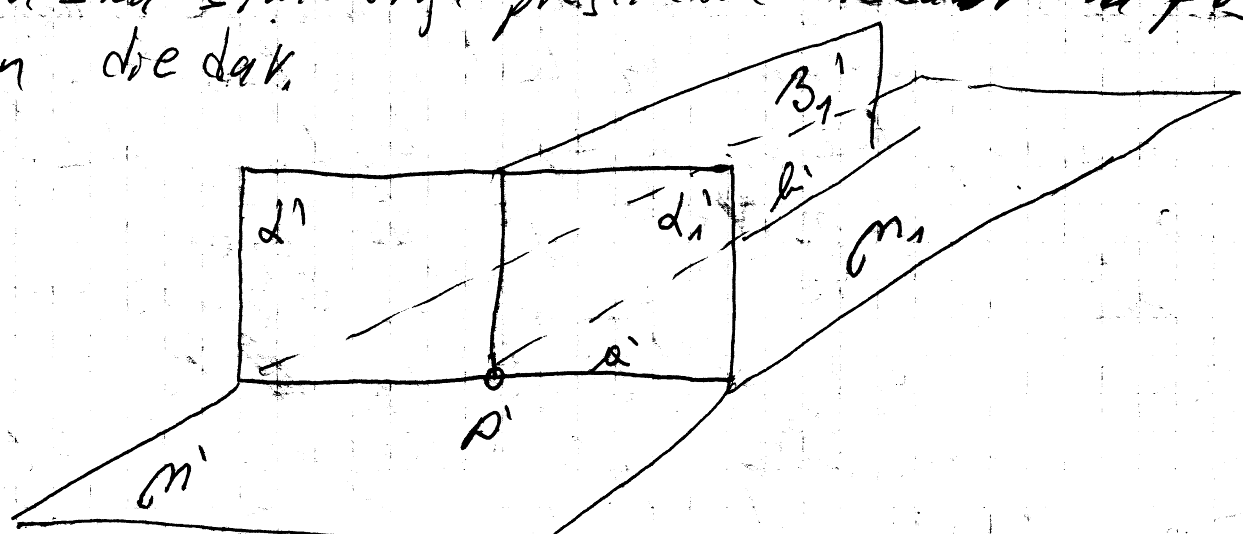
Primjetimo da se sada računanje diedrima svodi na računanje njihovih uglova normalnih presjeka.

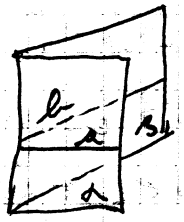
Definicija

Dva diedra $\measuredangle \alpha\beta$ i $\measuredangle \alpha_1\beta_1$ podudarni su ako su podudarni njihovi uglovi normalnih presjeka. To zapisujemo ovako $\measuredangle \alpha\beta \cong \measuredangle \alpha_1\beta_1$. Sada je očito da vrijede sljedeće tvrdnje

1° u skupu svih diedara relacija „≅" je podudarno je relacija ekvivalencije i

2° ravanska simetrija preslikava diedar na podudaran diedar.





Teorema

Za svaki poluprostor W' sa granicom α', za svaku poluravan $\alpha_1' \subset \alpha'$ a čija je ivica p' i za svaki diedar $\sphericalangle \alpha\beta$ postoji jedna i samo jedna poluravan $\beta_1' \subset W'$ čija je ivica p' i takva da je $\sphericalangle \alpha_1'\beta_1' \cong \sphericalangle \alpha\beta$. - diedar $\alpha\beta$.

Dokaz: Neka je μ' ravan koja je normalna na ~~ravan~~ pravu p' i $\mu' \cap p' = \{P'\}$. $\mu' \cap \alpha_1' = a'$ i $\mu' \cap W' = \mu_1'$. Dalje, neka je $\sphericalangle ab$ jedan ugao normalnog presjeka diedra $\alpha\beta$. Po aksiomi III_4 odmah slijedi da poluravan μ_1' sadrži jednu i samo jednu polupravu b' čija je početna tačka P' tako da je $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$. Prave p' i b' određuju poluravan β_1' i pritom je $\sphericalangle \alpha_1'\beta_1' \cong \sphericalangle \alpha\beta$. Da je poluravan β_1' jednoznačno određena dokazujemo ovako: ako postoji još jedna poluravan β_1'' čija je ivica prava p' i takva da vrijedi $\sphericalangle \alpha_1'\beta_1'' \cong \sphericalangle \alpha\beta$ onda u poluravni μ_1' postoji još jedna poluprava b'' čija je početna tačka P' i takva da je ugao $\sphericalangle a'b'' \cong \sphericalangle ab$. Ovo je kontradikcija sa aksiomom III_4 i teorema je dokazana.

Definicija simetralne ravni diedra

Ravan σ je simetralna ravan ili ravan simetrije diedra $\sphericalangle \alpha\beta$ ako je $\Sigma_\sigma(\alpha) = \beta$.

Iz ove definicije i razmatranog gradiva odmah slijedi

1. Simetralna ravan diedra jednoznačno je određena.
2. Ako je δ simetralna ravan $\measuredangle \alpha \beta$ onda je δ i simetralna ravan ugla normalnog presjeka tog diedra.
3. Ako je δ simetralna ravan ugla normalnog presjeka diedra, onda je δ i simetralna ravan tog diedra.

Transformacije podudarnosti u prostoru

Definicija transformacije podudarnosti u prostoru

Obostrano jednoznačno preslikavanje $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ takvo da za svake dvije tačke $A, B \in \mathcal{E}$ vrijedi $f(A)f(B) \cong AB$ je transformacija podudarnosti u prostoru. Skoro sve teoreme koje smo dokazali za slučaj transformacija podudarnosti u ravni možemo uopštiti i na slučaj transformacija podudarnosti u prostoru. Tako imamo:

Teorema 1

Ravanska simetrija kao i proizvod konačnog broja ravanskih simetrija je transformacija podudarnosti.

Teorema 2

Ako su A, B, C, D nekomplanarne tačke i A', B', C', D' također nekomplanarne tačke ali takve da vrijedi $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $AD \cong A'D'$, $BC \cong B'C'$, $BD \cong B'D'$ i $CD \cong C'D'$ onda postoji transformacija podudarnosti u prostoru kao proizvod konačnog broja ~~osnih~~ ravanskih simetrija Π tako da je $\Pi(A) = A'$, $\Pi(B) = B'$, $\Pi(C) = C'$ i $\Pi(D) = D'$

Teorema 3

Svaka transformacija podudarnosti u prostoru je proizvod konačnog broja ravanskih simetrija. Odgovarajuće ravni simetrija uvijek se mogu izabrati tako da transformacija podudarnosti u prostoru bude proizvod najviše četiri ravanske simetrije.

Teorema 4

Transformacija podudarnosti u prostoru jednoznačno je određena sa četiri para odgovarajućih tačaka A i A', B i B', C i C', D i D' ako tačke A, B, C i D nisu komplanarne a zadovoljen je uslov $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $AD \cong A'D'$, $BC \cong B'C'$, $BD \cong B'D'$ i $CD \cong C'D'$.

Teorema 5

Ako transformacija podudarnosti u prostoru preslikava poluravan na tu istu poluravan onda je ona ili identička transformacija ili ravanska simetrija.

Definicija

Proizvod $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ dvije ravanske simetrije Σ_α i Σ_β je rotacija u prostoru ili rotacija oko ose ako postoji prava $p = \alpha \cap \beta$. Ako je pritome $\alpha \perp \beta$ onda je to osna simetrija u prostoru a prava p je osa simetrije

Definicija

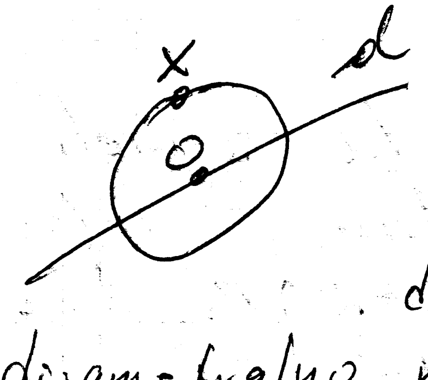
Proizvod $\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ tri ravanske simetrije uz uslov da je $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ i $\beta \perp \gamma$ je centralna simetrija u prostoru. Može se pokazati da postoji samo jedna tačka P tako da $P \in \alpha$, $P \in \beta$ i $P \in \gamma$. Tačka P je centar simetrije.

Kružnica i sfera

Neka je α ravan, O proizvoljna tačka u toj ravni i R duž.

Definicija

Kružnica $k(O,R)$ sa centrom u O i radijusom (poluprečnikom) R je skup svih tačaka $X \in \alpha$ koje zadovoljavaju uslov $OX \cong R$. Tačka $X \in \alpha$ za koju je $OX < R$ je unutrašnja tačka kružnice a tačka $X \in \alpha$ za koju je $OX > R$ je vanjska tačka kružnice. Prava koju sadrži centar kružnice zove se DIJAMETAR te kružnice. Svaka kružnica ima beskonačno mnogo dijametara i na osnovu aksiome III$_4$ svaki od tih dijametara ima sa kružnicom dvije zajedničke tačke. Te tačke zovemo dijametralno naspremnim tačkama kružnice.



Iz prethodnog očito slijedi da je kružnica beskonačan skup tačaka.

Teorema

Svaki dijametar kružnice, je njena osa simetrije

Dokaz

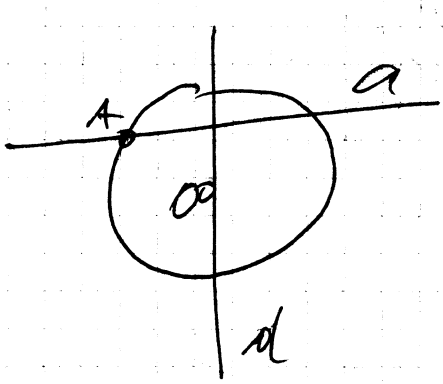
Neka je d dijametar kružnice $k(O,R)$ ~~osa simetrije~~ i X proizvoljna tačka te kružnice. Tada je $OX \cong R$. U simetriji σ_d tačka X preslika se na tačku X' tako da vrijedi $OX' \cong OX$. Pošto je sada $OX' \cong R$ to $X' \in k(O, R)$.

Teorema

Ako prava a sadrži tačku A kružnice $k(O,R)$ i nije normalna na pravu OA onda ona sadrži još jednu tačku te kružnice.

Dokaz

Neka je $A \in k(O,R)$, $A \in a$ i $a \not\perp OA$



Uzmimo dijametar d kružnice koji je normalan na pravu a. U simetriji σ_d vrijedi $\sigma_d(a) = a$; $\sigma_d(A) = A'$ i pri tome je

i $OA \cong OA'$ pa $OA' \cong R$ i $A' \in k(O,R)$.

Teorema

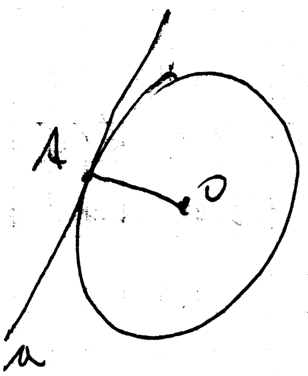
Prava i kružnica mogu imati najviše dvije zajedničke tačke

Dokaz -ćemo izvesti indirektnim putem. Pretpostavimo da prava p i kružnica $k(O,R)$ imaju tri zajedničke tačke A, B, C. Kako je $AO \cong BO$

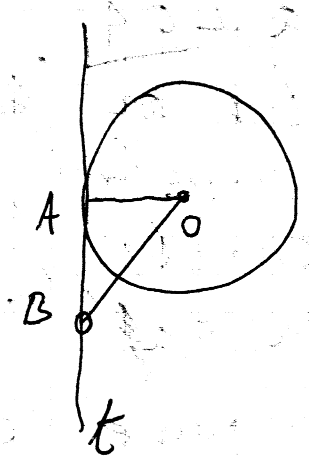
$\cong R$ to tačka $O \in s_1$ gdje je s_1 simetrala duži AB i prema tome $s_1 \perp p$

Kako je BO ≅ CO ≅ R to tačka O pripada s_a gdje je s_a simetrala duži BC, pa bome s_a normalno na p. Na taj način dobivamo da u jednoj tački O postoje dvije različite normale na istu pravu p ~~za istu tačku~~. Dobijena kontradikcija pokazuju da prava i kružnica nemogu imati tri zajedničke tačke.

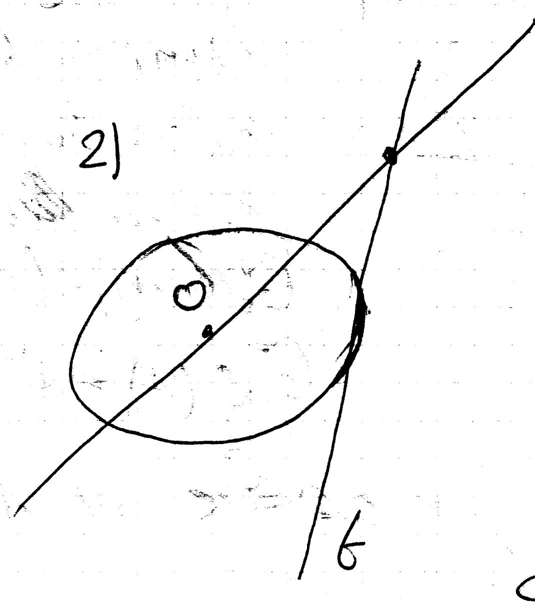
Kao posljedicu prethodne dvije teoreme imamo teoremu: Prava koja sadrži tačku A kružnice k(O, R) i normalna je na dijametar OA ne sadrži više ni jednu tačku kružnice.



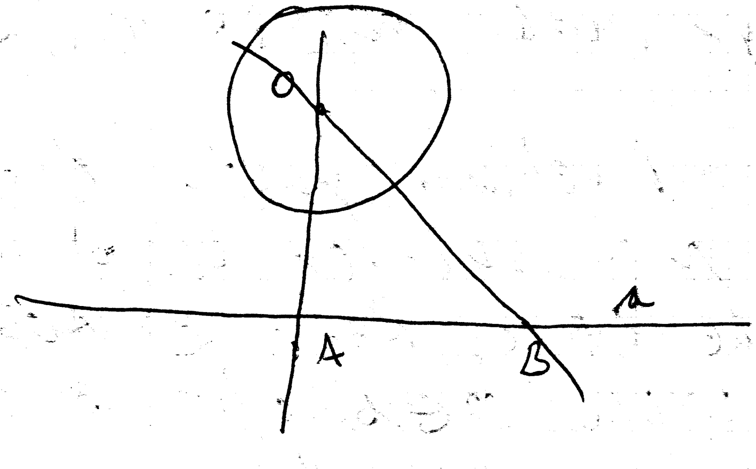
1)

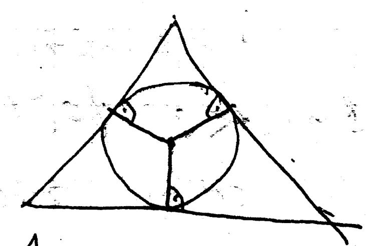


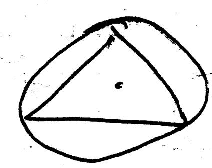
2)

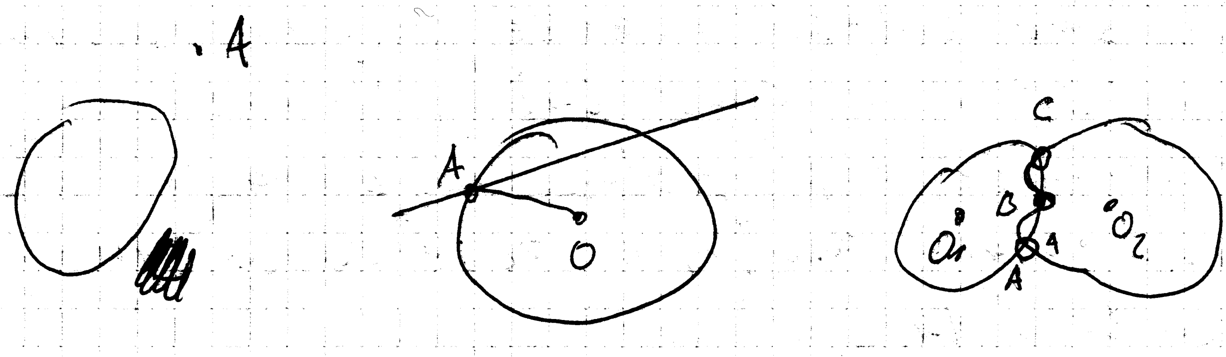


3)









$$\alpha \perp \overline{OA}$$

<u>Definicija:</u>

Prava koja se pominje u prethodnoj teoremi je tangenta kružnice. Tačka A je tačka dodira tangente i kružnice. Za kružnicu kažemo da dodiruje pravu. Iz posljednje definicije i prethodnih teorema imamo ove <u>posljedice</u>:

1. Svaka tačka tangente koja je različita od tačke dodira je vanjska tačka kružnice.
2. Ako je A tačka tangente koja je različita od tačke dodira onda postoji još jedna i samo jedna tangenta te kružnice koja sadrži tačku A.
3. Ako je A vanjska tačka kružnice, a prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravu $\overline{OA}$, onda je svaka tačka prave a vanjska tačka kružnice.

Dokazali smo da se simetrale uglova trougla sijeku u istoj tački. Sada je jasno da je ta tačka centar kružnice koja dodiruje svaku stranicu trougla. Ovakva kružnica se zove upisana kružnica trougla. Prema tome za svaki trougao postoji jedna i samo jedna upisana kružnica, Uslovno smo dokazali da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački. Ta tačka je centar kružnice koja prolazi kroz sva tri vrha trougla. Ovakva kružnica zove se opisana kružnica trougla.

Teorema

Presjek dvije kružnice je skup od najviše dvije tačke.

Dokaz Predpostavimo da kružnice k_1 ~~...~~ imaju tri zajedničke tačke. Pošto je $O_1A \cong O_1B$ to tačka O_1 pripada simetrali s_1 duž AB. Također pošto je $O_2A \cong O_2B$ to i tačka O_2 pripada simetrali s_1 duži AB. Na isti način iz $O_1B \cong O_1C$ slijedi da tačka O_1 pripada simetrali S_2 duži BC. Iz $O_2B \cong O_2C$ slijedi da tačka O_2 ~~...~~ pripada simet. S_2 duži BC. Na taj način dobivamo da dvije različite prave S_1 i S_2 imaju dvije ~~različite~~ iste tačke O_1, O_2 što je nemoguće.

Neka je $\mathcal{E}$ prostor, O tačka iz $\mathcal{E}$ i R duž.

Definicija

Sfera $S(O,R)$ sa centrom u O i radijusom (poluprečnikom) R je skup svih tačaka $X \in \mathcal{E}$ takvih da je $OX \cong R$. Tačka $X \in \mathcal{E}$ za koje je $OX < R$ je unutrašnja tačka sfere a tačka $X \in \mathcal{E}$ za koje je $OX > R$ je vanjska tačka sfere.

Svaka od prethodnih teorema može se uopštiti i tako da važi i za sferu.

Navešćemo neko od njih: a) simetrija u odnosu na ravan koja sadrži centar sfere preslikava sferu na samu sebe.

2. Teorema ~~presjek~~ prave i sfere je skup od najviše dvije zajedničke tačke.

Ako je taj skup od jedne tačke onda je prava tangenta sfere a zajednička tačka je dodirna tačka tangente i sfere.

Teorema

Ako je A vanjska tačka sfere, prava a sadrži tačku A i ⊥ $\underline{OA}$ [redacted] onda je svaka tačka te prave vanjska tačka sfere.

Teorema

Osna simetrija u prostoru u odnosu na pravu koja sadrži centar sfere i centralna simetrija u prostoru u odnosu na centar sfere preslikavaju sferu na samu sebe.

Teorema

Ako ravan α sadrži tačku A sfere $S(O,R)$ i nije normalna na pravu $\underline{OA}$ onda vrijedi $\alpha \cap S(O,R) =$ kružnica

Ako α sadrži tačku A sfere $S(O,R)$ i normalna je na pravu OA onda vrijedi $\alpha \cap S(O,R)$ je kružnica $k(O,R)$. U ovom drugom slučaju kažemo da je ravan α tangentna ravan sfere a tačku A zovemo dodirnom tačkom tangentne ravni i sfere.

Ako je A vanjska tačka sfere, ~~A prava~~ α ravan koja sadrži tačku A i normalna je na prav $\underline{OA}$ onda je svaka tačka ravni α vanjska tačka sfere.

Teorema

Ako postoji sfera koja sadrži četri nekompla_ name tačke onda postoji ~~[illegible]~~ samo jedna takva sfera.

PITANJA ZA ISPIT

GLAVA 1

1. Aksiome incidencije i posljedice
2. Aksiome poretka i posljedice (prve dvije leme)
3. Aksiome poretka i posljedice (teoreme i leme)
4. Aksiome poretka (i sve teoreme)
5. Duž, izlomljena linija, poluprava
6. Orjentacija poluprave i posljedice
7. Poluravan (u što spadaju konveksni skupovi i sl.)
8. Ugao, diedar, trougao

GLAVA 2

1. Aksiome podudarnosti i posljedice (prve tri leme)
2. Aksiome podudarnosti i posljedice (leme od 4 do 9)
3. Relacije "... manje od ..." i "veće od..." za duži i njihove posljedice
4. Relacije "... manje od..." i "... veće od..." za uglove i njihove posljedice
5. Osnovne teoreme o dužima i uglovima
6. Pravi ugao normalne prave
7. Normalnost prave i ravni
8. Normalnost dvije ravni

~~[illegible]~~

GLAVA 3

1. Osna simetrija u ravni i posljedice.
2. Transformacije podudarnosti u ravni i posljedice
3. Dokazati teoremu: Ako transformacija podudarnosti preslikava polupravu na tu istu polupravu ona je ili identična transformacija ili osna simetrija. Podudarnost figura i posljedice,
4. Primjene transformacija podudarnosti
5. Rotacija
6. Translacija i centralna simetrija
7. Simetrija u odnosu na ravan
8. Transformacije podudarnosti u prostoru, kružnica i sfera